Tester le modèle de Solow

(1) Ramener Solow dans le plan $(\log y(0), g_y)$.

En approximant le modèle dans un voisinage de l'état stationnaire :

$$z(t) = e^{-\beta t} z(0)$$

avec $\beta = (1-\alpha)(n+x+\delta)$ la vitesse de convergence

et $z(t) = \log \frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}^*}$ la distance à l'état stationnaire

$\hookrightarrow$ $\log \hat{y}(t) = (1 - e^{-\beta t}) \log \hat{y}^* + e^{-\beta t} \hat{y}(0)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\log \hat{y}(t) - \log \hat{y}(0)}_{\text{taux de croissance}} = (1 - e^{-\beta t}) \log \hat{y}^* - (1 - e^{-\beta t}) \log \hat{y}(0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\log \hat{y}(t) - \log \hat{y}(0)}{t}}_{\text{taux de croissance moyen}} = \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \log \hat{y}^* - \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \log \hat{y}(0)$$

or $\hat{y}(t) = \frac{y(t)}{A(t)}$ ← $y(t)$: PIB par tête ; $A(t)$ ← efficacité du travail

$$\Rightarrow \log \hat{y}(t) = \log y(t) - \log A(t)$$

On sait aussi que $A(t) = e^{xt} \cdot A(0) \Rightarrow \log A(t) = \log A(0) + xt$

En substituant dans le taux de croissance moyen de la production par tête efficace

$$\frac{\log y(t) - xt - \log A(0) - \log y(0) + \log A(0)}{t} = \frac{1-e^{-\beta t}}{t}\log \hat{y}^* - \frac{1-e^{-\beta t}}{t}(\log y(0) - \log A(0))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\log y(t) - \log y(0)}{t}}_{\text{taux de croissance moyen de la production par tête}} = x + \frac{1-e^{-\beta t}}{t}\log \hat{y}^* - \frac{1-e^{-\beta t}}{t}\log y(0) + \frac{1-e^{-\beta t}}{t}\log A(0)$$

condition initiale de la production par tête

condition initiale inobservée de l'efficacité du travail

Pour une économie i $(=1,2,..,N)$ on a donc :

$$g_{y,i} = x + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \log \hat{y}^* - \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \log y_i(0) + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \log A_i(0)$$

SI les économies sont structurellement homogènes :

$s_i = s \; \forall i$, $n_i = n \; \forall i$ et $\delta_i = \delta \; \forall i$ $\Rightarrow \hat{y}^*_i = \hat{y}^* \; \forall i$

$\alpha_i = \alpha \; \forall i$

et ne diffèrent que par les conditions initiales.

Autrement (on verra plus loin) il faut indicer $\hat{y}^*$ avec i (par exemple si le taux d'épargne est spécifique à chaque économie).

Le seul problème : Que faire du terme $\log A_i(0)$ qui est inobservé ?

Hypothèse

$$\log A_i(0) = a + \varepsilon_i$$

a : niveau commun de l'efficacité du travail

ε_i : partie idiosyncrasique de l'efficacité du travail

avec ε_i une variable aléatoire de moyenne nulle et non corrélée avec la condition initiale de la production par tête :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i \cdot \log y_i(0)] = 0$$

Cette hypothèse est nécessaire pour que nous puissions estimer sans biais les paramètres du modèle.

Finalement, nous avons donc :

$$g_{y,i} = \underbrace{\alpha + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} a + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \log \hat{y}^*}_{\text{ne dépend pas de } i} - \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \log y_i(0) + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \varepsilon_i$$

Ce qui suggère le modèle statistique linéaire suivant :

$$g_{y,i} = c_0 + c_1 \log y_i(0) + u_i$$

Si nous parvenons à estimer c_0 et c_1 en utilisant des données, nous pourrons en déduire une estimation de β.

(2) Estimation d'un modèle linéaire simple par les MCO

MCO → Moindres Carrés Ordinaires.

Soit le modèle linéaire

$$y_i = a + b x_i + u_i$$

- y_i : variable expliquée
- x_i : variable explicative
- u_i : résidu

On cherche les valeurs de (a, b) qui permettent d'expliquer au mieux y_i avec x_i. Pour cela on utilise des observations pour ces deux

variables (l'échantillon).

↳ On cherche (a,b) qui minimise la somme des carrés des résidus (la part de y_i inexpliquée par x_i).

N ← nb d'observations dans l'échantillon.

$$\hookrightarrow \quad (\hat{a},\hat{b}) = \underset{\{a,b\}}{\arg\min} \sum_{i=1}^{N} u_i^2$$

$$(\rightarrow \quad (\hat{a},\hat{b}) = \underset{\{a,b\}}{\arg\min} \sum_{i=1}^{N} (y_i - a - bx_i)^2$$

Problème d'optimisation, on trouve :

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \qquad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

avec

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

les moyennes arithmétiques de la variable explicative et de la variable expliquée.

$\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont des variables aléatoires car dépendent des y qui dépendent des résidus qui sont des variables aléatoires

⇒ La précision d'un estimateur est d'autant plus importante que sa variance est faible

⇒ L'estimateur n'est pas forcément égal à la vraie valeur du paramètre estimé. Si la nature nous donne un autre échantillon

on trouvera une valeur différente de l'estimateur

MAIS On peut montrer que sous certaines conditions l'estimateur nous donne en moyenne la vraie valeur du paramètre. On dit alors que l'estimateur est sous biais.

Dans le cas qui nous interesse l'estimateur est sous biais dès lorsque le residu (d'esperance nulle) est non corrélé avec la variable explicative.

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [b(x_i - \bar{x}) + \overbrace{u_i - \bar{u}}](x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{b} = b + \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i-\bar{u})(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$$

vraie valeur de la pente.

$$\text{Lo} \quad \hat{b} = b + \frac{\sum (u_i-\bar{u})(x_i-\bar{x})}{\sum (x_i-\bar{x})^2}$$

Ainsi la moyenne est

$$\mathbb{E}[\hat{b}] = b + \underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{\sum (u_i-\bar{u})(x_i-\bar{x})}{\sum (x_i-\bar{x})^2}\right]}_{\text{biais}}$$

le biais est nul si x_i est déterministe ou si x_i non corrélé avec les résidus u_i.

Notons $\mathbb{V}[\hat{b}]$ et $\mathbb{V}[\hat{a}]$ les variances des estimateurs de beta et a. On définit la statistique de student comme le rapport d'un estimateur à la racine carrée de sa variance (l'écart-type). Par exemple

$$t_b = \frac{\hat{b}}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{b}]}}$$

On dira qu'un estimateur est significativement différent de zéro si la statistique de student associée est plus grande que 1,96 en valeur absolue.

Enfin on mesure la qualité de la regression en comparant la variance des résidus avec la variance de la variable expliquée. On définit le coefficient de détermination

$$R^2 = 1 - \frac{\mathbb{V}[u_i]}{\mathbb{V}[y_i]}$$

- si proche de 0, la variance des résidus est grande relativement à celle de la variable expliquée $y \Rightarrow x$ n'explique pas grand chose de la variabilité observée de y.

- si proche de 1, la variance des résidus est petite relativement à celle de la variable expliquée $y \Rightarrow x$ explique une large part de la variabilité observée de y.

$$R^2 = 1 - \frac{\mathbb{V}[u_i]}{\mathbb{V}[y_i]}$$

- si proche de 0, la variance des résidus est grande relativement à celle de la variable expliquée $y \Rightarrow x$ n'explique pas grand chose de la variabilité observée de y.

- si proche de 1, la variance des résidus est petite relativement à celle de la variable expliquée $y \Rightarrow x$ explique une large part de la variabilité observée de y.

$$R^2 = 1 - \frac{\mathbb{V}[u_i]}{\mathbb{V}[y_i]}$$

- si proche de 0, la variance des résidus est grande relativement à celle de la variable expliquée $y \Rightarrow x$ n'explique pas grand chose de la variabilité observée de y.

- si proche de 1, la variance des résidus est petite relativement à celle de la variable expliquée $y \Rightarrow x$ explique une large part de la variabilité observée de y.

(3) Convergence absolue : estimations de MRW

MRW : Mankiw, Romer et Weil (1992)
Quaterly Journal of Economics

TESTS FOR UNCONDITIONAL CONVERGENCE

Dependent variable: log difference GDP per working-age person 1960–1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	−0.266	0.587	3.69
	(0.380)	(0.433)	(0.68)
ln(Y60)	0.0943	−0.00423	−0.341
	(0.0496)	(0.05484)	(0.079)
$\bar{R}^2$	0.03	−0.01	0.46
s.e.e.	0.44	0.41	0.18
Implied λ	−0.00360	0.00017	0.0167
	(0.00219)	(0.00218)	(0.0023)

Note. Standard errors are in parentheses. Y60 is GDP per working-age person in 1960.

⇒ Convergence absolue seulement pour les pays de l'OCDE. Pour les autres échantillons le pouvoir explicatif du modèle de Solow est nul.

(4) Tester la convergence conditionnelle

Une explication du relatif échec du modèle de Solow dans la section précédente est l'hypothèse d'homogénéité structurelle.

Nous avons supposé

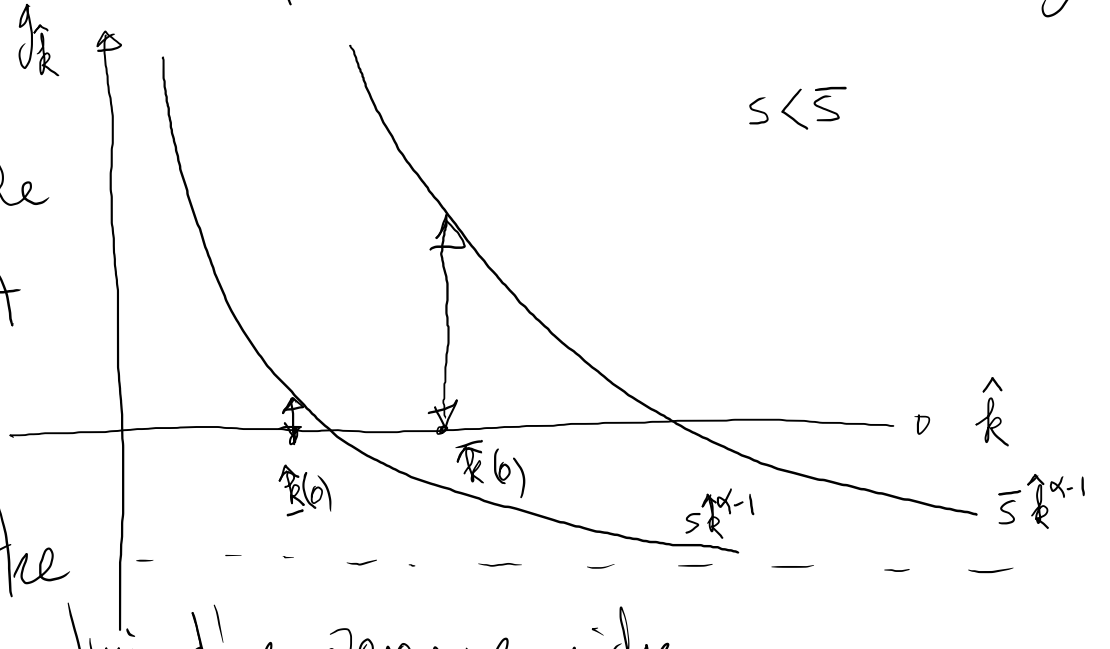
$$s_i = s \ \forall i, \ n_i = n \ \forall i, \ \delta_i = \delta \ \forall i \text{ et } \alpha_i = \alpha \ \forall i$$

$$\Rightarrow \hat{y}_i^* = \left(\frac{s}{n+x+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \forall i$$

Relâchons cette hypothèse en supposant

- que le taux d'épargne est spécifique
- que le taux de croissance démographique est spécifique

En suivant MRW on omet les conséquences sur la vitesse de convergence, qui devrait maintenant être spécifique à chaque économie (puisqu'elle dépend du taux de croissance démographique). On ne s'intéresse qu'aux conséquences sur $\hat{y}^*$.



Si les taux d'épargne sont différents (i.e. le taux d'épargne d'une économie initialement plus riche est plus élevé), le taux de croissance d'une éco pauvre peut être plus faible que celui d'une économie riche.

Le taux de croissance de l'économie i est maintenant

$$g_{y,i} = x + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} a + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \log \hat{y}_i^* - \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \log y_i(0) + \underbrace{\frac{1-e^{-\beta t}}{t} \varepsilon_i}_{u_i}$$

$\hat{y}_i^*$: état stationnaire spécifique

$\frac{\alpha}{1-\alpha}$

avec $\log \hat{y}_i^* = \log\left(\frac{s_i}{n_i + x + \delta}\right)$

$$\Rightarrow \log \hat{y}_i^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} \log s_i - \frac{\alpha}{1-\alpha} \log(n_i + x + \delta)$$

Donc

$$g_{y,i} = x + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} a + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \log s_i - \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \log(n_i + x + \delta) - \frac{1-e^{-\beta t}}{t} \log y_i(0) + u_i$$

Le modèle statistique devient

$$g_{y,i} = c_0 + c_1 \log s_i + c_2 \log(n_i + x + \delta) + c_3 \log y_i(0) + u_i$$

- c_0 : $x + \frac{1-e^{-\beta t}}{t} a$
- c_1 : $\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1-e^{-\beta t}}{t}$
- c_2 : $-\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1-e^{-\beta t}}{t}$
- c_3 : $-\frac{1-e^{-\beta t}}{t}$
- u_i : hétérogénéité inobservée sur la condition initiale de l'efficacité du travail

Si le modèle de Solow est « bon », nous devrions trouver :

$$c_1 > 0 \quad , \quad c_2 < 0 \quad , \quad c_3 < 0$$

et $c_1 + c_2 = 0$

Estimation par les MCO...

Dependent variable: log difference GDP per working-age person 1960–1985

Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	1.93	2.23	2.19
	(0.83)	(0.86)	(1.17)
ln(Y60)	−0.141	−0.228	−0.351
	(0.052)	(0.057)	(0.066)
ln(I/GDP)	0.647	0.644	0.392
	(0.087)	(0.104)	(0.176)
$\ln(n + g + \delta)$	−0.299	−0.464	−0.753
	(0.304)	(0.307)	(0.341)
$\bar{R}^2$	0.38	0.35	0.62
s.e.e.	0.35	0.33	0.15
Implied λ	0.00606	0.0104	0.0173
	(0.00182)	(0.0019)	(0.0019)

Note. Standard errors are in parentheses. Y60 is GDP per working-age person in 1960. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05.

- Signes attendus
- R^2 beaucoup plus grands

Mais
- β faible (< théorie)
- restriction $c_1 + c_2 = 0$ rejetée

Qualitativement le modèle de Solow est satisfaisant :

Les données ne rejettent pas l'hypothèse de convergence conditionnelle

Mais quantitativement il y a un problème : les données rejettent les restrictions du modèle (à part les restrictions de signe).

$$\beta = (1-\alpha)(n+g+\delta)$$

$1/3$ $\quad$ 2% $\quad$ 2% $\quad$ 2% $\quad \simeq 4\%$

Alors que les estimat° sont toutes ± largement inférieures à 2 % !

vitesse de convergence

$$\beta = (1-\alpha)(n+g+\delta)$$

α : 1/3 ; n : 2% ; g : 2% ; δ : 2%

$\simeq$ 4%

difficile à changer

Alors que les estimat° sont toutes ± largement inférieures à 2% !

IDÉE β théorique en α : une partie du salaire rémunère un facteur accumulable → éducation capital humain