

CROISSANCE ÉCONOMIQUE

SESSION DE RATTRAPAGE

Mardi 16 juin 2026

On considère un modèle de Solow augmenté d'une seconde variable d'état : le stock de capital humain. Soient $K(t)$ le stock de capital physique, $H(t)$ le stock de capital humain, $L(t)$ la population (force de travail) dont le taux de croissance $n > 0$ est constant, et $Y(t)$ la production à l'instant t . La technologie de production est :

$$Y(t) = K(t)^\alpha H(t)^\lambda L(t)^{1-\alpha-\lambda}$$

où les paramètres α et λ sont strictement positifs et vérifient $\alpha + \lambda < 1$. Les deux types de capital se déprécient au même taux $\delta \in]0, 1[$. Leurs lois d'accumulation sont :

$$\begin{aligned}\dot{K}(t) &= s_K Y(t) - \delta K(t), \\ \dot{H}(t) &= s_H Y(t) - \delta H(t),\end{aligned}$$

où $s_K \in]0, 1[$ et $s_H \in]0, 1[$ sont respectivement le taux d'épargne en capital physique et le taux d'épargne en capital humain, avec $s_K + s_H < 1$. **(1)** On suppose que la population à l'instant initial $t = 0$ est connue, on note $L(0) = L_0$. Déterminer le niveau de la population à un instant t quelconque. **(2)** Exprimer la production par tête $y(t) = Y(t)/L(t)$ en fonction du capital physique par tête $k(t) = K(t)/L(t)$ et du capital humain par tête $h(t) = H(t)/L(t)$. **(3)** La fonction de production est-elle néoclassique? Justifier. **(4)** Établir le système d'équations différentielles caractérisant la dynamique jointe du capital physique par tête

$k(t)$ et du capital humain par tête $h(t)$. Pourquoi dit-on que ces deux dynamiques sont *jointes*? **(5)** On s'intéresse à l'état stationnaire non trivial (k^*, h^*) , où les deux stocks par tête sont strictement positifs et constants. Montrer qu'en cet état stationnaire :

$$\frac{k^*}{h^*} = \frac{s_K}{s_H}$$

Interpréter. **(6)** Calculer l'état stationnaire des stocks par tête k^* et h^* , puis celui de la production par tête y^* . **(7)** En déduire le niveau de la consommation par tête à l'état stationnaire, c^* . **(8)** Déterminer l'élasticité de la production par tête de long terme y^* par rapport au taux d'épargne en capital physique s_K . Comparer cette élasticité à celle que l'on obtiendrait dans le modèle de Solow standard (sans capital humain, $\lambda = 0$). Commenter. **(9)** Le taux d'épargne de la règle d'or est le couple (s_K, s_H) qui maximise la consommation par tête à l'état stationnaire. Déterminer les taux d'épargne de la règle d'or, notés s_K^{or} et s_H^{or} , et montrer qu'ils valent respectivement α et λ . **(10)** Deux économies partagent les mêmes paramètres α , λ , n et δ , mais diffèrent par leurs taux d'épargne (s_K, s_H) . Le modèle peut-il rendre compte d'écarts *durables* de revenu par tête entre ces économies? L'introduction du capital humain aide-t-elle à expliquer l'ampleur des écarts de revenu par tête observés entre les pays, au-delà de ce que permettrait le seul capital physique? Commenter

(on pourra se référer à l'analyse de Mankiw, Romer et Weil). **(11)** On suppose désormais que le taux d'épargne en capital humain est contraint à une valeur $\bar{s}_H < \lambda$ (par exemple parce que le financement de l'éducation est insuffisant). Le seul instrument disponible est alors le taux d'épargne en capital physique. Déterminer le taux d'épargne en capital physique s_K^* qui maximise la consommation par tête à l'état stationnaire. Montrer que $s_K^* > \alpha$, mais que $s_K^* + \bar{s}_H < \alpha + \lambda$. Commenter.