

CROISSANCE ÉCONOMIQUE

SESSION DE RATRAPAGE

Mardi 16 juin 2026

Soient $K(t)$ le stock de capital physique d'une économie à l'instant t , $L(t)$ la population (assimilée à la force de travail) à l'instant t dont le taux de croissance $n > 0$ est constant, $T > 0$ une quantité de terre — ou plus généralement de ressources naturelles — disponible *en quantité fixe*, et $Y(t)$ la production à l'instant t . La production est décrite par la fonction :

$$Y(t) = K(t)^\alpha L(t)^\beta T^\gamma$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in]0, 1[$ et $\alpha + \beta + \gamma = 1$. La terre, contrairement au capital et au travail, n'est ni accumulable ni reproductible : sa quantité T reste constante au cours du temps. **(1)** On suppose que la population à l'instant initial $t = 0$ est connue, $L(0) = L_0$. Déterminer le niveau de la population à un instant t quelconque. **(2)** Étudier les rendements d'échelle de la fonction de production. Montrer en particulier que, à *quantité de terre donnée*, la production présente des rendements d'échelle décroissants par rapport au couple (K, L) . Quelle caractéristique de la terre explique ce résultat? **(3)** On note $k(t) = K(t)/L(t)$ le capital par tête et $z(t) = T/L(t)$ la quantité de terre par tête. Exprimer la production par tête $y(t) = Y(t)/L(t)$ en fonction de k et de z . **(4)** À quantité de terre par tête z donnée, la fonction $k \mapsto f(k) = k^\alpha z^\gamma$ est-elle néo-classique? On vérifiera notamment les conditions d'Inada. **(5)** Déterminer la dynamique de la terre par tête $z(t)$, puis résoudre l'équation

différentielle obtenue. Interpréter. **(6)** La dynamique du stock de capital agrégé est donnée par :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

où $s \in]0, 1[$ est le taux d'épargne et $\delta > 0$ le taux de dépréciation du capital. Établir l'équation différentielle vérifiée par le capital par tête $k(t)$. Pourquoi cette équation n'admet-elle pas d'état stationnaire strictement positif et constant? **(7)** On introduit le ratio capital sur production $\kappa(t) = K(t)/Y(t)$. En différenciant (le logarithme de) la fonction de production, montrer que le taux de croissance de la production vérifie :

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) + \beta n$$

(8) En déduire que le ratio capital sur production obéit à l'équation différentielle linéaire :

$$\dot{\kappa}(t) = (1 - \alpha)s - [(1 - \alpha)\delta + \beta n] \kappa(t)$$

(9) Montrer qu'il existe un unique ratio capital sur production stationnaire κ^* strictement positif, le calculer, et établir qu'il est globalement stable. Donner l'expression de $\kappa(t)$. **(10)** On se place désormais sur le sentier de croissance équilibrée, c'est-à-dire lorsque $\kappa = \kappa^*$. Calculer les taux de croissance g_K et g_Y , puis celui de la production par tête g_y . Montrer que :

$$g_y = -\frac{\gamma n}{1 - \alpha}$$

Interpréter le signe de ce taux de croissance.
(11) Discuter l'effet sur g_y du taux de croissance démographique n et de la part de la terre γ dans la production. Le taux d'épargne s influence-t-il g_y ? Que devient le modèle lorsque $\gamma \rightarrow 0$? Quel enseignement, déjà présent chez les économistes classiques (Ricardo, Malthus), retrouve-t-on ici? **(12)** On suppose à présent que la production bénéficie d'un progrès technique augmentant le travail :

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^\beta T^\gamma$$

où l'efficacité du travail croît au taux constant $\dot{A}(t)/A(t) = x > 0$. Reprendre la démarche de la question **(10)** et montrer que le taux de croissance de la production par tête sur le sentier de croissance équilibrée est :

$$g_y = \frac{\beta x - \gamma n}{1 - \alpha}$$

Sous quelle condition l'économie connaît-elle une croissance par tête durablement positive? Commenter au regard de la question **(11)**.