

CROISSANCE ET DÉVELOPPEMENT

Le 23 août 2026 à 16:23

Soient $K(t)$ le stock de capital physique d'une économie à l'instant t , $L(t)$ la population à l'instant t dont le taux de croissance $n > 0$ est constant, et $Y(t)$ la production à l'instant t . **(1)** On suppose que la population à l'instant initial $t = 0$ est connue, on note $L(0) = L_0$. Déterminer le niveau de la population à un instant t quelconque. **(2)** On suppose que la production est définie par la fonction de production CES :

$$Y(t) = \left(\alpha K(t)^\psi + (1 - \alpha)L(t)^\psi \right)^{\frac{1}{1-\psi}}$$

avec $\alpha \in]0, 1[$ un paramètre technologique, et $\sigma = 1/(1-\psi)$ l'élasticité de substitution entre le travail et le capital. Cette fonction de production généralise la fonction Cobb Douglas, que l'on retrouve comme un cas particulier lorsque ψ tend vers 0. Écrire la production par tête en fonction du stock de capital par tête. **(3)** Donner l'expression générale, c'est-à-dire sans spécifier la forme de la fonction de production, de l'élasticité de la production par tête par rapport au capital par tête. **(4)** En considérant la fonction CES définie plus haut, montrer que l'élasticité de la production par tête, y , par rapport au stock de capital physique par tête, k , que l'on notera $\alpha(k)$ n'est généralement pas constante, sauf dans le cas Cobb-Douglas. **(5)** La fonction de production est-elle néoclassique? Pourquoi? **(6)** La dynamique du stock de capital agrégé est donnée par :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

où $s \in [0, 1]$ est le taux d'épargne et $\delta > 0$ le

taux de dépréciation du capital physique. Définir, à l'aide d'une équation, la dynamique du stock de capital par tête, $k(t) = K(t)/L(t)$. Donner une interprétation de cette équation. **(7)** Calculer le taux de croissance du stock de capital par tête, $g_k(t)$, et représenter graphiquement ce taux de croissance (en n'oubliant pas de justifier la construction du graphique). **(8)** Donner une expression du taux de croissance de la production par tête. **(9)** Déterminer les conditions sous lesquelles un état stationnaire strictement positif existe. Discuter son unicité. **(10)** Lorsque celui-ci existe, calculer l'état stationnaire des variables par tête dans ce modèle, on notera k^* et y^* . **(11)** Quelles sont les propriétés remarquables de cet état stationnaire? **(12)** Sous quelle condition le modèle prédit-il de la croissance à long terme. Commenter.