Croissance et Développement

Université du Maine (Partiel, L2)

Mardi 11 décembre 2018

Exercice 1 Soient $K(t)$ le stock de capital physique d'une économie à l'instant t, $L(t)$ la population qui croît au taux constant $n > 0$, $\alpha \in]0,1[$ un paramètre technologique, $s \in]0,1[$ le taux d'épargne et $\delta \in [0,1]$ le taux de dépréciation du capital physique. La dynamique du stock de capital physique est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

et la technologie de production est de type Cobb-Douglas :

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

(1) Donnez une interprétation du paramètre α de la technologie de production. **(2)** Décrivez et interprétez la dynamique du capital par tête $k(t) = K(t)/L(t)$. **(3)** Donnez une expression analytique du taux de croissance du stock de capital physique par tête. **(4)** Représentez graphiquement le taux de croissance du stock de capital physique par tête (en expliquant la construction du graphique) et commentez. **(5)** Calculez l'état stationnaire du modèle (pour le capital par tête, la production par tête et la consommation par tête). **(6)** Quel est le rapport entre l'état stationnaire du stock de capital par tête et le niveau de long terme du capital par tête ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 Dans cet exercice on considère un modèle de Solow augmenté d'une seconde variable d'état : le stock de capital humain. Soit la fonction de production :

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} K(t)^{\lambda} L(t)^{1-\alpha-\lambda}$$

Les variables Y, K, et L ont les interprétations usuelles. H est le niveau de capital humain. Les paramètres α et λ sont positifs et vérifient $\alpha + \lambda < 1$. Le stock de capital physique se déprécie au taux $\delta \in]0,1[$. La loi d'évolution du stock de capital physique est donnée par :

$$\dot{K}(t) = s_K Y(t) - \delta K(t)$$

où $s_K \in]0,1[$ est le taux d'épargne en capital physique. La loi d'évolution du stock de capital humain est donnée par :

$$\dot{H}(t) = s_H Y(t) - \delta H(t)$$

où $s_H \in]0,1[$ est le taux d'épargne en capital humain. **(1)** Montrez que la dynamique jointe des variables par tête est caractérisée par :

$$\begin{cases} \dot{k}(t) &= s_K k(t)^{\alpha} h^{\lambda} - (n+\delta)k(t) \\ \dot{h}(t) &= s_H k(t)^{\alpha} h^{\lambda} - (n+\delta)h(t) \end{cases}$$

Commentez. **(2)** Posez le système d'équations qui permet de calculer l'état stationnaire. **(3)** Montrez qu'à l'état stationnaire on doit avoir :

$$\frac{k^\star}{h^\star} = \frac{s_K}{s_H}$$

Commentez. **(4)** Calculez l'état stationnaire pour le capital physique par tête, le capital humain par tête, la production par tête et la consommation par tête. Vous devriez trouver :

$$c^\star = (1 - s_K - s_H) \left(\frac{s_K}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} \left(\frac{s_H}{n+\delta} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}}$$

(5) Décrivez l'arbitrage, relatif au niveau de la consommation par tête à l'état stationnaire, dans les choix d'épargne. Calculez les taux d'épargne de la règle d'or, on notera s_K^{or} et s_H^{or}, c'est-à-dire les valeurs de s_K et s_H qui maximisent le niveau de la consommation par tête à l'état stationnaire. **(6)** Supposons que le taux d'épargne en capital humain soit fixé, égal à $\bar{s}_H < s_H^{\text{or}}$. Calculez le taux d'épargne en capital physique qui maximise $c^\star$, on notera $s_K^\star$ le taux d'épargne optimal. **(7)** Montrez que $s_K^\star > s_K^{\text{or}}$ mais que $s_K^\star + \bar{s}_H < s_K^{\text{or}} + s_H^{\text{or}}$. Commentez.