

CROISSANCE ÉCONOMIQUE

SESSION DE RATRAPAGE (ÉLÉMENTS DE CORRECTION)

Mardi 16 juin 2026

Modèle de Solow à deux facteurs accumulables :

$$Y(t) = K(t)^\alpha H(t)^\lambda L(t)^{1-\alpha-\lambda}, \quad \alpha, \lambda > 0, \alpha + \lambda < 1,$$

$$\dot{K} = s_K Y - \delta K, \quad \dot{H} = s_H Y - \delta H.$$

(1) La population vérifie $\dot{L}(t) = nL(t)$, équation différentielle linéaire dont la solution est :

$$L(t) = L_0 e^{nt}.$$

(2) La fonction de production est homogène de degré un (rendements d'échelle constants) : en divisant par $L(t)$,

$$y(t) = \frac{K^\alpha H^\lambda L^{1-\alpha-\lambda}}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha \left(\frac{H}{L}\right)^\lambda \left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha-\lambda} = k(t)^\alpha h(t)^\lambda.$$

(3) Oui. La fonction est à rendements d'échelle constants (homogène de degré un en (K, H, L)). Les productivités marginales sont strictement positives et décroissantes ; par exemple pour le capital physique,

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} H^\lambda L^{1-\alpha-\lambda} > 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$$

puisque $\alpha \in]0, 1[$ (de même pour H). Enfin les conditions d'Inada sont satisfaites pour chaque facteur accumulable :

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial Y}{\partial K} = +\infty, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = 0,$$

et de même pour H . La technologie est donc bien néoclassique.

(4) On procède comme dans le cours pour chacun des deux stocks. Pour le capital physique par tête,

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - n k(t) = \frac{s_K Y(t)}{L(t)} - (n+\delta)k(t) = s_K k(t)^\alpha h(t)^\lambda - (n+\delta)k(t).$$

La même démarche appliquée au capital humain donne le système :

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = s_K k(t)^\alpha h(t)^\lambda - (n + \delta)k(t), \\ \dot{h}(t) = s_H k(t)^\alpha h(t)^\lambda - (n + \delta)h(t). \end{cases}$$

Les deux dynamiques sont *jointes* : la variation de chaque stock par tête dépend non seulement de son propre niveau, mais aussi du niveau de l'autre stock, car la production — donc l'investissement — fait intervenir à la fois le capital physique et le capital humain. On ne peut étudier l'accumulation de l'un indépendamment de l'autre.

(5) À l'état stationnaire non trivial, $\dot{k} = \dot{h} = 0$:

$$\begin{cases} s_K k^{\star\alpha} h^{\star\lambda} = (n + \delta)k^*, \\ s_H k^{\star\alpha} h^{\star\lambda} = (n + \delta)h^*. \end{cases}$$

En faisant le rapport membre à membre des deux équations, le terme $k^{\star\alpha} h^{\star\lambda}$ se simplifie et il vient :

$$\frac{k^*}{h^*} = \frac{s_K}{s_H}.$$

Une économie qui épargne relativement plus en capital physique se caractérise, à l'état stationnaire, par un stock de capital physique relativement plus élevé (par rapport au capital humain). La composition du stock de capital reflète la composition de l'épargne.

(6) On reporte $k^* = \frac{s_K}{s_H} h^*$ dans la seconde équation stationnaire, soit $s_H k^{\star\alpha} h^{\star\lambda-1} = n + \delta$:

$$s_H \left(\frac{s_K}{s_H} \right)^\alpha h^{\star\alpha+\lambda-1} = n + \delta \iff s_K^\alpha s_H^{1-\alpha} h^{\star-(1-\alpha-\lambda)} = n + \delta.$$

On en déduit :

$$h^* = \left(\frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\lambda}},$$

et, de façon symétrique (en reportant $h^* = \frac{s_H}{s_K} k^*$ dans la première équation) :

$$k^* = \left(\frac{s_K^{1-\lambda} s_H^\lambda}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\lambda}}.$$

En substituant dans $y^* = k^{\star\alpha} h^{\star\lambda}$ et en réarrangeant, on obtient l'expression compacte :

$$y^* = \left(\frac{s_K}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} \left(\frac{s_H}{n + \delta} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}}.$$

(On vérifie que le cas $\lambda = 0$ redonne le résultat standard $y^* = (s_K/(n+\delta))^{\alpha/(1-\alpha)}$.)

(7) La consommation est la part non épargnée de la production, $c(t) = (1 - s_K - s_H)y(t)$, d'où à l'état stationnaire :

$$c^* = (1 - s_K - s_H) \left(\frac{s_K}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} \left(\frac{s_H}{n + \delta} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}}.$$

(8) En passant au logarithme, $\ln y^* = \frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda} \ln \frac{s_K}{n+\delta} + \frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda} \ln \frac{s_H}{n+\delta}$, l'élasticité cherchée est :

$$\frac{\partial \ln y^*}{\partial \ln s_K} = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \lambda}.$$

Dans le modèle de Solow standard ($\lambda = 0$), cette élasticité vaut $\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Comme $1 - \alpha - \lambda < 1 - \alpha$, on a $\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda} > \frac{\alpha}{1-\alpha}$: l'introduction d'un second facteur accumule *amplifie* la sensibilité de la production de long terme au taux d'épargne en capital physique. En effet, une hausse de s_K augmente directement le capital physique, ce qui élève la production, donc l'investissement en *capital humain*, lequel accroît à son tour la production : un effet de second tour absent du modèle à un seul facteur accumule.

(9) À la règle d'or, $c^*(s_K, s_H)$ est maximale, d'où $\frac{\partial c^*}{\partial s_K} = \frac{\partial c^*}{\partial s_H} = 0$. En utilisant $\frac{\partial y^*}{\partial s_K} = \frac{1}{s_K} \frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda} y^*$ et $\frac{\partial y^*}{\partial s_H} = \frac{1}{s_H} \frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda} y^*$, les conditions du premier ordre $(1 - s_K - s_H) \frac{\partial y^*}{\partial s_i} = y^*$ s'écrivent :

$$\frac{1 - s_K - s_H}{1 - \alpha - \lambda} = \frac{s_K}{\alpha}, \quad \frac{1 - s_K - s_H}{1 - \alpha - \lambda} = \frac{s_H}{\lambda}.$$

Le rapport des deux donne $\frac{s_K}{s_H} = \frac{\alpha}{\lambda}$; en reportant dans l'une des équations on trouve :

$$\boxed{s_K^{\text{or}} = \alpha, \quad s_H^{\text{or}} = \lambda.}$$

Chaque taux d'épargne de la règle d'or est égal à l'élasticité de la production par rapport au facteur correspondant. Le niveau de consommation associé est :

$$c_{\text{or}}^* = (1 - \alpha - \lambda) \left(\frac{\alpha}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} \left(\frac{\lambda}{n + \delta} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}}.$$

(10) Oui, le modèle engendre des écarts *durables* de revenu par tête : à paramètres technologiques et démographiques identiques, deux économies ayant des taux d'épargne (s_K, s_H) différents convergent vers des états stationnaires y^* différents (et y restent). Surtout, l'introduction du capital humain *amplifie* considérablement ces écarts : l'exposant pertinent passe de $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ à $\frac{\alpha+\lambda}{1-\alpha-\lambda}$ pour l'effet conjoint des deux taux d'épargne. Avec une part du capital physique $\alpha \simeq 1/3$, le modèle de Solow standard peine à expliquer les énormes écarts de revenu observés entre pays (l'élasticité $\frac{\alpha}{1-\alpha} \simeq 1/2$ est trop faible). En ajoutant le capital humain avec une part λ du même ordre de grandeur, on obtient une élasticité bien plus grande : c'est précisément

l'argument de Mankiw, Romer et Weil (1992), pour qui le modèle de Solow *augmenté du capital humain* rend bien mieux compte de la dispersion internationale des revenus par tête que le modèle de Solow originel.

(11) Le taux d'épargne en capital humain est fixé à $\bar{s}_H < \lambda$: la situation est sous-optimale. On maximise $c^*(s_K) = (1 - s_K - \bar{s}_H) y^*(s_K, \bar{s}_H)$ par rapport au seul s_K . La condition du premier ordre est $\frac{1-s_K-\bar{s}_H}{1-\alpha-\lambda} = \frac{s_K}{\alpha}$, soit, en résolvant pour s_K :

$$s_K^* = \alpha \frac{1 - \bar{s}_H}{1 - \lambda}.$$

Comme $\bar{s}_H < \lambda$, on a $\frac{1-\bar{s}_H}{1-\lambda} > 1$, donc $s_K^* > \alpha = s_K^{\text{or}}$: on cherche à compenser la sous-accumulation de capital humain en sur-accumulant du capital physique. Mais cette compensation est incomplète : un calcul direct donne

$$s_K^* + \bar{s}_H = (\alpha + \lambda) + \frac{1 - \alpha - \lambda}{1 - \lambda} (\bar{s}_H - \lambda),$$

et comme $\bar{s}_H < \lambda$ et $1 - \alpha - \lambda > 0$, le second terme est négatif :

$$s_K^* + \bar{s}_H < \alpha + \lambda = s_K^{\text{or}} + s_H^{\text{or}}.$$

Le taux d'épargne total reste inférieur à celui de la règle d'or, et la consommation de long terme demeure sous le niveau de la règle d'or (figure 1) : en l'absence de l'instrument s_H , on ne peut atteindre l'optimum non contraint. Une politique de soutien au financement de l'éducation — relâchant la contrainte sur s_H — domine donc le seul ajustement du taux d'épargne en capital physique.

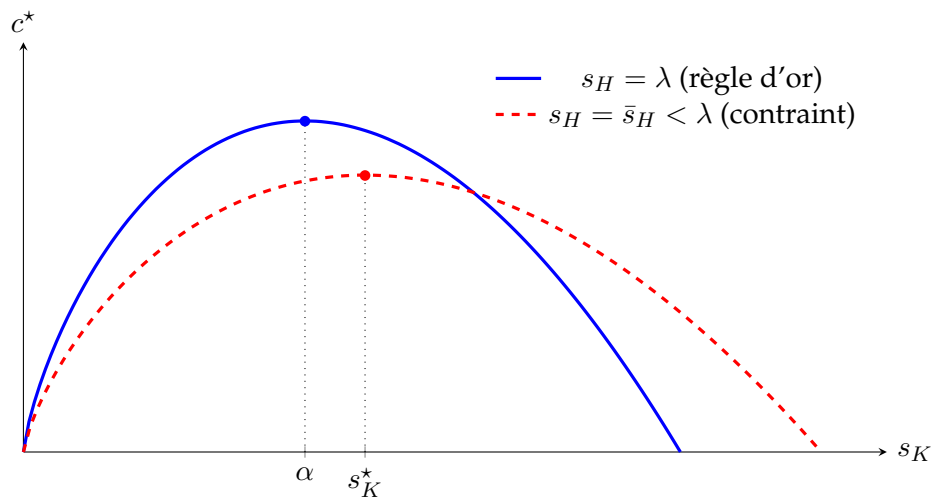


FIGURE 1 – Consommation par tête de long terme en fonction de s_K . Lorsque $s_H = \lambda$ (trait plein), le maximum est atteint en $s_K = \alpha$: c'est la règle d'or. Lorsque le capital humain est sous-accumulé, $s_H = \bar{s}_H < \lambda$ (pointillés), le maximum est déplacé vers la droite ($s_K^* > \alpha$) et la consommation maximale atteignable est plus faible.