

CROISSANCE ÉCONOMIQUE

SESSION DE RATRAPAGE (ÉLÉMENTS DE CORRECTION)

Le 7 juin 2026 à 22:10

Soient $K(t)$ le stock de capital physique, $L(t)$ la population dont le taux de croissance $n > 0$ est constant, $T > 0$ une quantité de terre fixe, et $Y(t)$ la production :

$$Y(t) = K(t)^\alpha L(t)^\beta T^\gamma, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

(1) La variation de la population vérifie $\dot{L}(t) = nL(t)$. En résolvant cette équation différentielle linéaire (voir le cours pour les détails), on obtient :

$$L(t) = L_0 e^{nt}.$$

(2) Pour $\lambda > 0$, on a :

$$(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta (\lambda T)^\gamma = \lambda^{\alpha+\beta+\gamma} K^\alpha L^\beta T^\gamma = \lambda Y,$$

donc la fonction présente des rendements d'échelle constants par rapport au triplet (K, L, T) . En revanche, à *quantité de terre T donnée* :

$$(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta T^\gamma = \lambda^{\alpha+\beta} Y = \lambda^{1-\gamma} Y,$$

et comme $1 - \gamma < 1$, les rendements d'échelle par rapport au seul couple (K, L) sont décroissants. C'est précisément le caractère *fixe et non accumule* de la terre qui en est responsable : en augmentant simultanément capital et travail sans pouvoir augmenter la terre, on se heurte à la rareté relative de ce facteur, qui capte une part γ de la production.

(3) La production par tête est :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K(t)^\alpha L(t)^\beta T^\gamma}{L(t)} = K(t)^\alpha L(t)^{\beta-1} T^\gamma \\ &= \left(\frac{K(t)}{L(t)} \right)^\alpha L(t)^{\alpha+\beta-1} T^\gamma = k(t)^\alpha L(t)^{-\gamma} T^\gamma \\ &= k(t)^\alpha \left(\frac{T}{L(t)} \right)^\gamma = k(t)^\alpha z(t)^\gamma, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\alpha + \beta - 1 = -\gamma$. La production par tête dépend donc du capital par tête k et de la terre par tête z .

(4) À z donné, $f(k) = z^\gamma k^\alpha$. On a $f(0) = 0$, $f'(k) = \alpha z^\gamma k^{\alpha-1} > 0$ et $f''(k) = \alpha(\alpha - 1)z^\gamma k^{\alpha-2} < 0$ puisque $0 < \alpha < 1$: la productivité marginale du capital est positive et décroissante. Les conditions d'Inada sont satisfaites :

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0.$$

À terre par tête donnée, la fonction de production intensive est donc bien néoclassique. La difficulté du modèle ne vient pas de la forme de f , mais de la décroissance *exogène* de z que l'on établit à la question suivante.

(5) Comme $z(t) = T/L(t)$ avec T constant, en prenant le logarithme et en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = -\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = -n,$$

soit $\dot{z}(t) = -n z(t)$, dont la solution est :

$$z(t) = z_0 e^{-nt}, \quad z_0 = \frac{T}{L_0}.$$

La terre par tête décroît au taux n : la population augmente tandis que la terre reste fixe, la dotation en ressources de chaque travailleur s'érode donc continûment.

(6) On a $k = K/L$, donc :

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{K(t)} - n = s \frac{Y(t)}{K(t)} - (n + \delta).$$

Comme $Y/K = y/k$, il vient :

$$\dot{k}(t) = s y(t) - (n + \delta)k(t) = s k(t)^\alpha z(t)^\gamma - (n + \delta)k(t),$$

soit, en substituant $z(t) = z_0 e^{-nt}$:

$$\dot{k}(t) = s z_0^\gamma e^{-n\gamma t} k(t)^\alpha - (n + \delta)k(t).$$

Cette équation est *non autonome* : le coefficient $s z_0^\gamma e^{-n\gamma t}$ dépend explicitement du temps et tend vers 0. Un état stationnaire strictement positif et constant exigerait $s k^\alpha z(t)^\gamma = (n + \delta)k$ à tout instant, ce qui est impossible puisque $z(t)$ varie sans cesse. La base productive par tête s'érodant continûment, le capital par tête ne peut se stabiliser à un niveau constant.

(7) En prenant le logarithme de la fonction de production :

$$\ln Y(t) = \alpha \ln K(t) + \beta \ln L(t) + \gamma \ln T,$$

puis en dérivant par rapport au temps (avec T constant, donc $g_T = 0$) :

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) + \beta g_L(t) + \gamma g_T = \alpha g_K(t) + \beta n.$$

(8) Par définition de $\kappa = K/Y$:

$$\frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)} = g_K(t) - g_Y(t) = g_K(t) - (\alpha g_K(t) + \beta n) = (1 - \alpha)g_K(t) - \beta n.$$

Or, à partir de l'accumulation du capital :

$$g_K(t) = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s \frac{Y(t)}{K(t)} - \delta = \frac{s}{\kappa(t)} - \delta.$$

En reportant :

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = (1 - \alpha) \left(\frac{s}{\kappa} - \delta \right) - \beta n,$$

et en multipliant par κ :

$$\dot{\kappa}(t) = (1 - \alpha)s - [(1 - \alpha)\delta + \beta n]\kappa(t).$$

Le ratio capital sur production obéit donc à une équation différentielle linéaire (du premier ordre, à coefficients constants).

(9) L'état stationnaire $\dot{\kappa} = 0$ donne immédiatement :

$$\kappa^* = \frac{(1 - \alpha)s}{(1 - \alpha)\delta + \beta n} > 0,$$

unique. Posons $\theta \equiv (1 - \alpha)\delta + \beta n > 0$, de sorte que $\dot{\kappa} = \theta(\kappa^* - \kappa)$: le coefficient de κ étant négatif, $\dot{\kappa} > 0$ pour $\kappa < \kappa^*$ et $\dot{\kappa} < 0$ pour $\kappa > \kappa^*$ (voir le graphique en fin de copie). L'état stationnaire est donc globalement stable : quel que soit le ratio initial κ_0 , le ratio capital sur production converge vers κ^* . La solution de l'équation linéaire s'écrit :

$$\kappa(t) = \kappa^* + (\kappa_0 - \kappa^*) e^{-\theta t}.$$

(10) Sur le sentier de croissance équilibrée, $\kappa = \kappa^*$ est constant, donc $g_K = g_Y$. En utilisant $g_K = s/\kappa^* - \delta$:

$$g_K = \frac{s}{\kappa^*} - \delta = \frac{(1 - \alpha)\delta + \beta n}{1 - \alpha} - \delta = \frac{\beta n}{1 - \alpha}.$$

On retrouve bien le même résultat à partir de la question (7) : $g_Y = \alpha g_K + \beta n = g_K$ implique $(1 - \alpha)g_K = \beta n$. Ainsi :

$$g_K = g_Y = \frac{\beta n}{1 - \alpha}.$$

Le taux de croissance de la production par tête est alors :

$$g_y = g_Y - n = \frac{\beta n}{1 - \alpha} - n = \frac{\beta n - (1 - \alpha)n}{1 - \alpha} = \frac{(\alpha + \beta - 1)n}{1 - \alpha},$$

et comme $\alpha + \beta - 1 = -\gamma$:

$$g_y = -\frac{\gamma n}{1 - \alpha} < 0.$$

(On vérifie de même $g_k = g_K - n = g_y$.) La production par tête *décroît* le long du sentier de croissance équilibrée. C'est le résultat central : en présence d'un facteur fixe (la terre) et d'une population croissante, l'accumulation du capital ne parvient pas à compenser la raréfaction de la terre par tête, et le niveau de vie recule tendanciellement.

(11) Le taux $g_y = -\gamma n/(1-\alpha)$ est d'autant plus négatif que :

- le taux de croissance démographique n est élevé : plus la population croît vite, plus la terre par tête se raréfie rapidement, et plus le déclin du niveau de vie est marqué ;
- la part de la terre γ dans la production est grande : plus l'économie est dépendante du facteur fixe, plus le frein qu'il exerce est puissant.

Le taux d'épargne s n'apparaît pas dans l'expression de g_y : conformément au résultat classique du modèle de Solow, l'épargne n'a qu'un effet de *niveau* (elle modifie κ^* et donc la position du sentier de croissance), mais aucun effet sur le *taux de croissance* de long terme. Lorsque $\gamma \rightarrow 0$, on a $g_y \rightarrow 0$: la terre disparaît de la fonction de production, qui redevient une Cobb-Douglas standard $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$, et l'on retrouve le modèle de Solow habituel (état stationnaire constant pour k , absence de croissance par tête à long terme). On retrouve ici le pessimisme des économistes classiques : l'état stationnaire de Ricardo et le spectre malthusien, selon lesquels la croissance démographique butant sur une terre en quantité limitée condamne le revenu par tête à stagner puis à décliner — l'intuition moderne des « limites à la croissance ».

(12) Avec progrès technique augmentant le travail, $Y = K^\alpha (AL)^\beta T^\gamma$, le logarithme donne :

$$\ln Y = \alpha \ln K + \beta(\ln A + \ln L) + \gamma \ln T,$$

d'où, en dérivant :

$$g_Y = \alpha g_K + \beta(x + n).$$

Sur le sentier de croissance équilibrée, κ est constant donc $g_K = g_Y \equiv g$, ce qui donne $g = \alpha g + \beta(x + n)$, soit :

$$g_K = g_Y = \frac{\beta(x + n)}{1 - \alpha}.$$

Le taux de croissance de la production par tête devient :

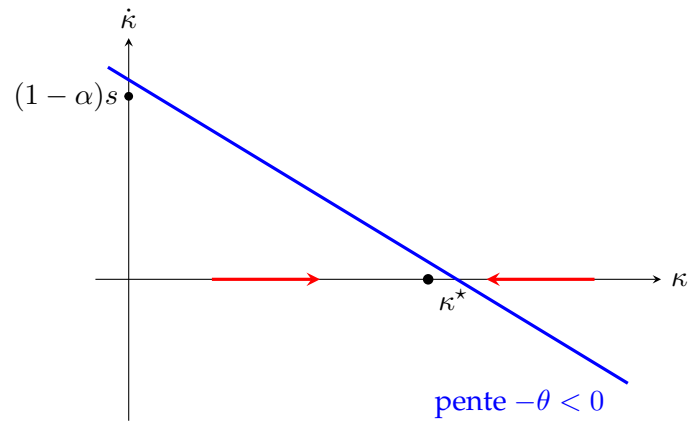
$$\begin{aligned} g_y = g_Y - n &= \frac{\beta(x+n) - (1-\alpha)n}{1-\alpha} = \frac{\beta x + (\alpha + \beta - 1)n}{1-\alpha} \\ &= \frac{\beta x - \gamma n}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

La croissance par tête est durablement positive si et seulement si :

$$\beta x > \gamma n.$$

Tout se joue donc dans une *course* entre, d'un côté, le progrès technique qui accroît l'efficacité du travail (terme βx) et, de l'autre, la raréfaction des ressources par tête engendrée par la croissance démographique (terme γn). Si le progrès technique est suffisamment rapide, il l'emporte sur le frein des ressources et l'économie connaît une croissance soutenue du niveau de vie : c'est la réponse « optimiste » (Solow, Romer) au pessimisme classique de la question **(11)**. Dans le cas particulier $\gamma = 0$ on retrouve le résultat standard $g_y = \beta x / (1-\alpha) = x$ (avec $\beta = 1 - \alpha$), c'est-à-dire une croissance par tête au taux du progrès technique.

Dynamique du ratio capital sur production (question 9)



Le ratio capital sur production κ augmente lorsqu'il est inférieur à κ^* et diminue lorsqu'il lui est supérieur : l'état stationnaire κ^* est globalement stable, avec $\theta = (1 - \alpha)\delta + \beta n$.