CROISSANCE ET DÉVELOPPEMENT

UNIVERSITÉ DU MAINE (ÉLÉMENTS DE CORRECTION DU PARTIEL, L2)

Mardi 11 décembre 2018

EXERCICE 1 Soient $K(t)$ le stock de capital physique d'une économie à l'instant t, $L(t)$ la population qui croît au taux constant $n > 0$, $\alpha \in]0,1[$ un paramètre technologique, $s \in]0,1[$ le taux d'épargne et $\delta \in [0,1]$ le taux de dépréciation du capital physique. La dynamique du stock de capital physique est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

et la technologie de production est de type Cobb-Douglas :

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

(1) Le paramètre α s'interprète comme l'élasticité de la production par rapport au stock de capital physique. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{Y/K} &= \frac{F_K(K,L)}{\frac{F(K,L)}{K}} \\
&= \frac{\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}}{K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}} \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

où $F(K,L)$ est la fonction de production et $F_K(K,L)$ sa dérivée partielle par rapport au stock de capital physique K. **(2)** Nous allons caractériser la dynamique du stock de capital par tête en calculant les variations de k à chaque instant. Nous avons :

$$\dot{k}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)$$

En appliquant la formule usuelle de dérivation d'un ratio de fonctions, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2} \\
&= \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \\
&= \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - k(t)n
\end{aligned}$$

puisque le taux de croissance de la population est supposé constant est égal à n. En substituant la loi d'évolution du stock de capital physique agrégé il vient :

$$\dot{k}(t) = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{L(t)} - nk(t)$$

soit encore :

$$\dot{k}(t) = \frac{sY(t)}{L(t)} - (n+\delta)k(t)$$

En notant que la production par tête, $y(t) = Y(t)/L(t)$, peut s'exprimer en fonction du stock de capital physique par tête :

$$y(t) = k(t)^{\alpha}$$

nous avons finalement :

$$\dot{k}(t) = sk(t)^{\alpha} - (n+\delta)k(t)$$

Le stock de capital physique par tête augmente, c'est-à-dire sa variation est positive, si et seulement si l'investissement par tête, $sk(t)^{\alpha}$ est supérieur à la dépréciation du stock de capital physique par tête, $(n+\delta)k(t)$. **(3)** Le taux de croissance d'une variable est le rapport de la variation et du niveau. Ainsi, nous obtenons le taux de croissance du stock de capital physique par tête en divisant les deux membres de la dernière équation par le niveau du stock de capital physique par tête :

$$g_k(t) = sk(t)^{\alpha-1} - (n+\delta)$$

Le taux de croissance est positif si et seulement si l'investissement brut par unité de capital physique est supérieur au taux de dépréciation du stock de capital physique par tête, $n+\delta$. **(4)** La représentation graphique du taux de croissance est décrite en plusieurs endroits dans le cours. Il ne faut pas oublier d'expliquer pourquoi la courbe du taux de croissance est monotone décroissante, pourquoi le taux de croissance diverge vers l'infini lorsque le stock de capital par tête tend vers zéro et pourquoi ce même taux de croissance tend vers $-(n+\delta)$ lorsque le stock de capital tend vers l'infini. **(5)** À l'état stationnaire, s'il existe, les variables par têtes sont constantes. Pour que la variation du stock de capital physique par tête soit nulle il faut que l'investissement par tête soit égal à la dépréciation du stock de capital physique par tête. Si on note $k^\star$ l'état stationnaire du stock de capital physque par tête, on doit donc avoir :

$$s\, {k^\star}^\alpha = (n+\delta)k^\star$$

En excluant le la solution nulle et en supposant que $k^\star$ est strictement positif, on peut diviser les deux membres de l'égalité par $k^\star$ et on obtient :

$${k^\star}^\alpha = \frac{n+\delta}{s}$$

soit de façon équivalente :

$$k^\star = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On note que l'état stationnaire du stock de capital physique par tête est une fonction monotone croissante du taux d'épargne (car $\alpha < 1$). On en déduit l'état stationnaire de la production par tête en substituant ce résultât dans la technologie intensive (pour tout k on a $y = k^\alpha$) :

$$y^\star = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Puisque $\alpha > 0$, l'état stationnaire de la production par tête est aussi une fonction monotone croissante du taux d'épargne. On obtient directement la consommation par tête à l'état stationnaire en rapellant que la consommation est une part constante de la production, on a :

$$c^\star = (1-s)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Le lien entre $c^\star$ et le taux d'épargne est moins trivial ici. Une augmentation du taux d'épargne induit une augmentation de la production à l'état stationnaire *et* une diminution de la part consommée de la production. L'impact total sur le niveau de la consommation par tête à l'état stationnaire dépend de l'ampleur de ces deux effets. **(6)** L'état stationnaire est le niveau de long terme de l'économie. Dit autrement, pour toute condition initiale $k(0) > 0$ le stock de capital physique par tête converge vers l'état stationnaire $k^\star$, $\lim_{t\to\infty} k(t) = k^\star$. On peut étayer ce résultat graphiquement à l'aide d'un diagramme des phases. En reprenant le graphique du taux de croissance (question 4). L'état stationnaire $k^\star$ est positionné à l'intersection de la courbe du taux de croissance (c'est-à-dire l'investissement net par unité de capital) et l'axe des abscisses. On remarque que le taux de croissance est positif si et seulement si $k < k^\star$. Autrement dit, le stock s'accroît lorsqu'il est inférieur à $k^\star$ et décroit lorsqu'il est supérieur à $k^\star$. De plus la variation du stock de capital physique par tête est d'autant plus faible que l'économie est proche de l'état stationnaire. Ainsi à long terme l'économie rejoint l'état stationnaire. Il est possible de retrouver cet argument graphique dans l'expression du taux de croissance :

$$\begin{aligned}
g_k(t) &= sk(t)^{\alpha-1} - (n+\delta)\\
&= s\left(k(t)^{\alpha-1} - \frac{n+\delta}{s}\right)\\
&= s\left(k(t)^{\alpha-1} - {k^\star}^{\alpha-1}\right)\\
&= s\,{k^\star}^{\alpha-1}\left(\left(\frac{k(t)}{k^\star}\right)^{\alpha-1} - 1\right)\\
&= (n+\delta)\left(\left(\frac{k(t)}{k^\star}\right)^{\alpha-1} - 1\right)
\end{aligned}$$

On voit bien ici, comme sur le graphique, que (*i*) le taux de croissance est positif si et seulement si l'économie est sous l'état stationnaire, (*ii*) le taux de croissance est d'autant plus faible (en valeur absolue) que l'économie est proche de l'état stationnaire (c'est-à-dire $k(t)/k^\star$ proche de 1).

EXERCICE 2 Dans cet exercice on considère un modèle de Solow augmenté d'une seconde variable d'état : le stock de capital humain. Soit la fonction de production :

$$Y(t) = K(t)^\alpha K(t)^\lambda L(t)^{1-\alpha-\lambda}$$

Les variables Y, K, et L ont les interprétations usuelles. H est le niveau de capital humain. Les paramètres α et λ sont positifs et vérifient $\alpha + \lambda < 1$. Le stock de capital physique se déprécie au taux $\delta \in]0,1[$. La loi d'évolution du stock de capital physique est donnée par :

$$\dot{K}(t) = s_K Y(t) - \delta K(t)$$

où $s_K \in]0,1[$ est le taux d'épargne en capital physique. La loi d'évolution du stock de capital humain est donnée par :

$$\dot{H}(t) = s_H Y(t) - \delta H(t)$$

où $s_H \in]0,1[$ est le taux d'épargne en capital humain. **(1)** On montre facilement que la dynamique jointe des variables par tête est caractérisée par :

$$\begin{cases}\dot{k}(t) &= s_K k(t)^\alpha h^\lambda - (n+\delta)k(t)\\ \dot{h}(t) &= s_H k(t)^\alpha h^\lambda - (n+\delta)h(t)\end{cases}$$

Pour la dynamique du stock de capital physique par tête, on a :

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2} \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - nk(t) \\ &= \frac{s_K Y(t)}{L(t)} - (n+\delta)k(t) \\ &= s_K k(t)^\alpha h^\lambda - (n+\delta)k(t)\end{aligned}$$

La derrnière ligne vient de l'hypothèse de rendement d'échelle constant (homogénéité de degré un de la fonction de production) qui nous permet d'écrire la production par tête comme une fonction du stock de capital physique par tête et su stock de capital humain par tête :

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{K(t)^\alpha H(t)^\lambda L(t)^{1-\alpha-\lambda}}{L(t)} \\ &= \left(\frac{K}{L(t)}\right)^\alpha \left(\frac{H(t)}{L(t)}\right)^\lambda \left(\frac{L(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha-\lambda} \\ &= k(t)^\alpha h^\lambda\end{aligned}$$

Nous avons suivi exactement la même démarche que dans l'exercice 1, la seule chose qui change c'est l'expression de la fonction de production. La variation du stock de capital physique par tête est positive si et seulement si l'investissement en capital physique est supérieur à la dépréciation du stock de capital physique par tête. On retrouve la seconde équation en suivant les mêmes étapes. On note que la variation du capital physique (humain) par tête dépend non seulement du niveau de stock de capital physique (humain) par tête, comme dans l'exercice 1, mais aussi du niveau du stock de capital humain (physique). Les deux dynamiques sont jointes, car la production est déterminée par les quantités de capital physique et humain, on ne peut étudier la dynamique du capital physique indépendamment de la dynamique du capital humain. **(2)** L'état stationnaire $(k^\star, h^\star)$ doit vérifier :

$$\begin{cases} s_K\ {k^\star}^\alpha\ {h^\star}^\lambda & = (n+\delta)k^\star \\ s_H\ {k^\star}^\alpha\ {h^\star}^\lambda & = (n+\delta)h^\star \end{cases}$$

À l'état stationnaire l'épargne par tête (en capital physique ou humain) doit être égale à la dépréciation (du capital physique ou humain). **(3)** En faisant le rapport des deux équations précédantes, on trouve directement :

$$\frac{k^\star}{h^\star} = \frac{s_K}{s_H}$$

Ce résultat intermédiaire est intuitif. Si une économie épargne relativement plus en capital physique (par example) elle sera caractérisée par un état stationnaire plus élevé du capital physique (relativement au capital humain). **(4)** En exprimant $k^\star$ en fonction de $h^\star$, on utilise la dernière équation, et en substituant dans le seconde équation du système définissant l'état stationnaire, on obtient :

$$s_H \left[\frac{s_K}{s_H} h^\star\right]^\alpha\ {h^\star}^\lambda = (n+\delta)h^\star$$

soit de façon équivalente :

$$s_H^{1-\alpha} s_K^\alpha\ {h^\star}^{\alpha+\lambda}$$

et donc :

$$h^\star = \left(\frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\delta}}$$

De la même façon on trouve

$$k^\star = \left(\frac{s_K^{1-\lambda} s_H^{1-\lambda}}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\delta}}$$

En substituant dans la fonction de production par tête :

$$y^\star = \left(\frac{s_K^{1-\lambda} s_H^{1-\lambda}}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\delta}} \left(\frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n+\delta}\right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\delta}}$$

Soit en réarrangeant :

$$y^\star = \left(\frac{s_K}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} \left(\frac{s_H}{n+\delta}\right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}}$$

Finalement, que la consommation est une part constante de la production, plus précisemment $c(t) = (1 - s_K - s_H)y(t)$ pour tout t, on obtient l'état stationnaire de la consommation par tête :

$$c^\star = (1-s_K-s_H)\left(\frac{s_K}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} \left(\frac{s_H}{n+\delta}\right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}}$$

Le paramètre $\alpha/1-\alpha-\lambda$ s'interprête comme l'élasticité de la production par tête à l'état stationnaire par rapport au taux d'épargne en capital physique. On remarque que cette élasticité est plus élevée que dans le modèle de Solow standard. L'introduction d'un second facteur accumulable magnifie la sensibilité de la production au taux d'épargne en capital physique. Cette augmentation de la sensibilité de la production au taux d'épargne en capital physique s'explique par le fait qu'une augmentation du taux d'épargne en capital physique affecte aussi l'accumulation du capital humain, qui à son tour (effet de second ordre) affecte la production. **(5)** Une augmentation du taux d'épargne (en capital physique ou humain) augmente le revenu par tête à l'état stationnaire, mais simultanément décroît la part consommée de la production. L'effet sur le niveau de la consommation à l'état stationnaire est donc non trivial. Il faut peser les conséquences relatives du changement de répartition (entre épargne et consommation) et l'accroissement de la production (à partager). Considérons les cas polaires. Choisir une épargne est nulle ($s_K = s_H = 0$), c'est décider de consommer la totalité de la production mais aussi décider de ne rien épargner. Ainsi à l'état stationnaire les facteurs accumulables et donc la production sont nuls. Avec un taux d'épargne nul la consommation par tête à l'état stationnaire est nulle. Choisir d'épargner toute la production ($s_K + s_H = 1$) devrait permettre de maximiser la production à l'état stationnaire (cela doit dépendre de la répartition entre épargne en capital physique et épargne en capital humain). Mais à nouveau dans ce cas aussi, quelque soit le niveau de la production, le niveau de la consommation par tête sera nul à l'état stationnaire (puisque le ménage décide d'épargner la totalité de la production il ne reste rien à manger). Dans les situations intermédiaires ($0 < s_K + s_H < 1$, $s_K > 0$ et $s_H > 0$), on obtient un niveau de consommation par tête strictement positif à l'état stationnaire. Par exemple, si on part d'une situation où l'épargne est nulle et décide d'augmenter d'un montant arbitrairement petit les deux taux d'épargnes, alors $1 - s_K - s_H$ va baisser et la production par tête $y^\star$ va augmenter. Mais l'ampleur de l'augmentation de la production sera bien plus importante que celle de la baisse de la part de la production consommée[1]. À la règle d'or, nous devons avoir :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_K} c^\star(s_K, s_H) & = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_H} c^\star(s_K, s_H) & = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (1 - s_K - s_H) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_K} y^\star(s_K, s_H) & = y^\star \\ (1 - s_K - s_H) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_H} y^\star(s_K, s_H) & = y^\star \end{cases}$$

On montre facilement que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_K} y^\star(s_K, s_H) = \frac{1}{s_K} \frac{\alpha}{1 - \alpha - \lambda} y^\star$$

1. En zéro la pente de $y^\star(s_K)$ est beaucoup plus importante que la pente de $1 - s_K - s_H$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_H} y^\star(s_K, s_H) = \frac{1}{s_H} \frac{\lambda}{1 - \alpha - \lambda} y^\star$$

En substituant dans le système des conditions nécessaires :

$$\begin{cases} \frac{1 - s_K - s_H}{1 - \alpha - \lambda} & = \frac{s_K}{\alpha} \\ \frac{1 - s_K - s_H}{1 - \alpha - \lambda} & = \frac{s_H}{\lambda} \end{cases}$$

En considérant le rapport des deux équations, on doit donc avoir :

$$\frac{s_K}{s_H} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

En exprimant s_H en fonction de s_H et en substituant dans la première équation du système, on trouve facilement :

$$s_K^{\mathrm{or}} = \alpha$$

et donc

$$s_H^{\mathrm{or}} = \lambda$$

les taux d'épargnes de la rêgle d'or. Finalement le niveau de consommation de la rêgle d'or est :

$$c_{\mathrm{or}}^\star = (1 - \alpha - \lambda) \left(\frac{\alpha}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1 - \alpha - \lambda}} \left(\frac{\lambda}{n + \delta} \right)^{\frac{\lambda}{1 - \alpha - \lambda}}$$

(6) Supposons que le taux d'épargne en capital humain soit fixé, égal à $\bar{s}_H < s_H^{\mathrm{or}}$. Clairement cette situation est sous optimale. Le seul instrument disponible pour maximiser le niveau de la consommation par tête à l'état stationnaire est alors le taux d'épargne en capital physique. À l'optimum contraint, on doit avoir :

$$\frac{1 - s_K - \bar{s}_H}{1 - \alpha - \lambda} = \frac{s_K}{\alpha}$$

En résolvant cette équation pour le taux d'épargne en capital physique, on trouve :

$$s_K^\star = \alpha \left[\frac{1}{1 - \lambda} (1 - \bar{s}_H) \right]$$

le taux d'épargne en capital physique qui maximise le niveau de la consommation à l'état stationnaire sachant que le taux d'épargne en capital humain est fixé à $\bar{s}_H$. Notons que l'on retrouve le taux d'épargne de la rêgle d'or si et seulement si $\bar{s}_H = \lambda$. **(7)** Quand $\bar{s}_H < s_H^{\mathrm{or}}$ on a :

$$\frac{1 - \bar{s}_H}{1 - \lambda} > 1$$

et donc :

$$s_K^\star > s_K^{\mathrm{or}}$$

Autrement dit, on essaye ici de compenser la sous accumulation en capital humain en accumulant plus de capital physique. Cependant, quelques calculs montrent que :

$$s_K^\star + \bar{s}_H = s_K^{\mathrm{or}} + s_H^{\mathrm{or}} + \frac{1-\alpha-\lambda}{1-\lambda}\left(\bar{s}_H - s_H^{\mathrm{or}}\right)$$

Ainsi, lorsque $\bar{s}_H < s_H^{\mathrm{or}}$, même si l'épargne en capital physique augmente pour compenser la sous accumulation en capital humain, le taux d'épargne total demeure inférieur à ce qu'il devrait être pour maximiser la consommation à l'état stationnaire. En l'absence d'un instrument, on obtient un niveau plus faible de la consommation à l'état stationnaire (on obtient toujours un « score » moins élevé avec une optimisation contrainte qu'avec une optimisation non contrainte).