ÉDUCATION, FORMATION ET CROISSANCE

UNIVERSITÉ DU MAINE (CORRECTION DU PARTIEL, L2)

EXERCICE 1 **(1)** Nous avons par définition de $\hat{k}$:

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + A\dot{L})}{(AL)^2}$$

c'est-à-dire :

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL}\frac{\dot{A}}{A} - \frac{K}{AL}\frac{\dot{L}}{L}$$

soit encore :

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{K}}{AL} - (n+x)\hat{k}$$

En substituant la loi d'évolution de K dans le premier terme, il vient :

$$\dot{\hat{k}} = \frac{s(1-\tau)Y - \delta K}{AL} - (n+x)\hat{k}$$

En substituant la fonction de production et en développant, on obtient :

$$\dot{\hat{k}} = s(1-\tau)\frac{K^{\alpha}G^{\beta}(AL)^{1-\alpha-\beta}}{AL} - (\delta+n+x)\hat{k}$$

En exploitant le fait que la technologie soit à rendement d'échelle constant, on obtient finalement :

$$\dot{\hat{k}} = s(1-\tau)\hat{k}^{\alpha}\hat{g}^{\beta} - (\delta+n+x)\hat{k}$$

où $\hat{g}$ est la dépense publique par tête efficace. On retrouve le résultat habituel, le stock de capital par tête efficace s'accroît si et seulement si l'investissement par tête efficace est supérieur à la dépréciation du stock de capital par tête efficace. **(2)** Par définition on a $G = \tau Y$ et donc aussi $\hat{g} = \tau\hat{y}$ en divisant les deux membres de l'égalité par AL. En substituant cette dernière égalité dans la fonction de production par tête efficace, il vient :

$$\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}\left(\tau\hat{y}\right)^{\beta}$$

De façon équivalente, en, divisant les deux membres par $\hat{y}^{\beta}$:

$$\hat{y}^{1-\beta} = \tau^{\beta}\hat{k}^{\alpha}$$

soit finalement :

$$\hat{y} = \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\hat{k}^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

en substituant dans la loi d'évolution du stock de capital par tête efficace, nous obtenons finalement :

$$\dot{\hat{k}} = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\hat{k}^{\frac{\alpha}{1-\beta}} - (\delta + n + x)\hat{k}$$

(3) L'élasticité de la production par tête efficace par rapport au stock de capital par tête efficace est :

$$\epsilon_{\hat{y}/\hat{k}} = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

On remarque que cette élasticité est plus grande que α. L'introduction de dépenses publiques productives accroît la sensibilité de $\hat{y}$ aux variations de $\hat{k}$. **(4)** Le taux de croissance d'une variable est obtenu en divisant la variation de cette variable avec son niveau. Dans le cas du stock de capital par tête efficace, nous avons donc :

$$g_{\hat{k}} = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\hat{k}^{\frac{\alpha}{1-\beta}-1} - (\delta + n + x)$$

(5) Pour un niveau quelconque du stock de capital physique par tête efficace, le taux de croissance de $\hat{k}$ est d'autant plus grand que $(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}$ est grand. Cette expression peut être décomposée comme le produit de deux termes $1-\tau$ et $\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}$; le premier terme est décroissant par rapport à τ alors que le second est croissant par rapport à τ. Il y a donc un arbitrage dans le choix de τ : augmenter τ augmente la croissance car en augmentant τ on augmente la dépense publique et donc la production, mais cette même augmentation de τ s'accompagne d'un effet défavorable dans la mesure on elle réduit le taux d'épargne effectif (les revenus taxés par l'état ne sont pas épargnés). Si elle existe la taxe optimale doit satisfaire la condition suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\Bigg|_{\tau=\tau^\star} = 0$$

Nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} = (1-\tau)\frac{\beta}{1-\beta}\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}-1} - \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

En annulant cette dérivée évaluée en $\tau^\star$ et en simplifiant, nous obtenons la condition suivante

$$\frac{1-\tau^\star}{\tau^\star}\frac{\beta}{1-\beta} = 1$$

Le taxe optimale est donc $\tau^\star = \beta$. **(6)** On obtient directement l'état stationnaire par analogie avec les résultats obtenus dans le cours/td en remarquant que la dynamique du stock de capital par tête peut s'écrire :

$$g_{\hat{k}} = \bar{s}\hat{k}^{\bar{\alpha}-1} - (\delta + n + x)$$

avec $\bar{s} = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}$ et $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\beta}$. Le niveau de capital par tête efficace qui annule le taux de croissance du capital par tête efficace est :

$$\hat{k}^\star = \left(\frac{\bar{s}}{\delta + n + x}\right)^{\frac{1}{1-\bar{\alpha}}}$$

c'est-à-dire en substituant les définitions de $\bar{s}$ et $\bar{\alpha}$:

$$\hat{k}^\star = \left(\frac{s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{\delta+n+x}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

En rappelant que

$$\hat{y} = \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\hat{k}^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

il vient :

$$\hat{y}^\star = \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\left(\frac{s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{\delta+n+x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

La consommation par tête efficace est donnée par la part des revenus net des impôts qui n'est pas épargnée, nous avons donc :

$$\hat{c} = (1-s)(1-\tau)\hat{y}$$

et donc à l'état stationnaire :

$$\hat{c}^\star = (1-s)(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\left(\frac{s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{\delta+n+x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$\hat{c}^\star = (1-s)\left[(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right]^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s}{\delta+n+x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

ou encore :

$$\hat{c}^\star = \left[(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right]^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}(1-s)\left(\frac{s}{\delta+n+x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

Cet état stationnaire est stable. Nous avons vu, dans la représentation graphique de $g_{\hat{k}}$, que le taux de croissance de $\hat{k}$ est positif si et seulement si $\hat{k}$ est inférieur à l'état stationnaire. Ainsi pour toute condition initiale du stock de capital par tête efficace, l'économie converge à long terme vers l'état stationnaire $\hat{k}^\star$. **(7)** Notons que dans la dernière expression de l'état stationnaire de $\hat{c}$, l'exposant $\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}$ est strictement positif. Ainsi, le niveau de long terme de la consommation par tête efficace est une fonction monotone croissante de $(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}$. Nous savons que, par construction, $\tau^\star$ maximise ce terme. Ainsi, $\tau^\star$, en plus d'être le taux de taxe qui maximise le taux de croissance à tout instant, maximise le niveau de long terme de la consommation. **(8)** Par analogie avec le cours, on trouve que la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire est :

$$\lambda = (1-\bar{\alpha})(\delta+n+x)$$

c'est-à-dire :

$$\lambda = \left(1-\frac{\alpha}{1-\beta}\right)(\delta+n+x)$$

On remarque que l'introduction de dépenses publiques productives ($\beta > 0$) réduit la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire. Cela va dans le bon sens, puisque nous avons montré en cours que la vitesse de convergence théorique du modèle de Solow de base est trop importante par rapport à ce que suggère les données. **(9)** Si $\beta = 1 - \alpha$, alors la production par tête efficace devient une fonction linéaire du stock de capital physique par tête efficace. On abandonne ainsi l'hypothèse de productivité marginale décroissante du capital. Le taux de croissance du stock de capital par tête efficace s'écrit alors :

$$g_{\hat{k}} = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} - (\delta + n + x)$$

Le taux de croissance de $\hat{k}$ ne dépend plus de son niveau. Le taux de croissance est constant : si le taux d'épargne est assez important l'économie croît indéfiniment à taux constant. Ainsi le stock de capital par tête tend vers l'infini, l'état stationnaire n'existe plus.