

ÉDUCATION, FORMATION ET CROISSANCE

(CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N°1)

Le 23 août 2026 à 16:22

Soient $k(t)$ le stock de capital physique d'une économie à l'instant t , $L(t)$ la population qui croît au taux constant $n > 0$, $\alpha \in]0, 1[$ un paramètre technologique, $s \in]0, 1[$ le taux d'épargne et $\delta \in [0, 1]$ le taux de dépréciation du capital physique. La dynamique du stock de capital physique est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

et la technologie de production est de type Cobb-Douglas :

$$Y(t) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$$

(1) Donnez une interprétation du paramètre α de la technologie de production. Le paramètre α est l'élasticité de la production par rapport au stock de capital physique. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y} &= \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} \frac{K}{Y} \\ &= \alpha K^\alpha L^{1-\alpha} \frac{1}{K^\alpha L^{1-\alpha}} \\ &= \alpha\end{aligned}$$

Dans le modèle de Solow, où les marchés sont parfaitement concurrentiels, le paramètre α s'interprète aussi comme la part des revenus du capital physique dans les revenus totaux. (2) Interprétez la loi d'évolution du stock de capital physique (la première équation). Cette équation nous dit que la variation du stock de capital physique est positive si et seulement si l'investissement est supérieur à la dépréciation du stock de capital physique. (3.a) Décrivez la dynamique du capital par tête $k(t) = K(t)/L(t)$, en montrant que :

$$\dot{k}(t) = sk(t)^\alpha - (n + \delta)k(t)$$

En partant de la définition du stock de capital physique par tête, nous avons :

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2}$$

en simplifiant et en remplaçant $\dot{L}/L$ par n , le taux de croissance constant de la population, il vient :

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - n$$

en substituant la loi d'évolution du capital physique dans le numérateur du premier terme du membre de droite, on obtient :

$$\dot{k} = \frac{sK^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K}{L} - nk$$

soit encore :

$$\dot{k} = \frac{sK^\alpha L^{1-\alpha}}{L} - (n + \delta)k$$

ou de façon équivalente :

$$\dot{k} = sK^\alpha L^{-\alpha} - (n + \delta)k$$

soit finalement, par définition de k :

$$\dot{k} = sk^\alpha - (n + \delta)k$$

(3.b) Interprétez cette équation. Le stock de capital par tête s'accroît si et seulement si l'investissement par tête domine la dépréciation du capital par tête (le stock de capital par tête se déprécie pour deux raisons : l'usure des machines, au taux δ , l'augmentation du nombre de tête, au taux n). **(4)** Donnez une expression analytique du taux de croissance du stock de capital physique par tête. On obtient une expression du taux de croissance de k en rapportant la variation de k au niveau de k . En supposant que k est strictement positif, on obtient cette expression en divisant les deux membres de la dernière équation par k :

$$g_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - (n + \delta)$$

Le taux de croissance du stock de capital par tête est égal à l'investissement net (de la dépréciation) par unité de capital. Dans le modèle de Solow, la croissance est entièrement déterminée par l'offre. **(5)** Représentez graphiquement le taux de croissance du stock de capital physique par tête (en expliquant la construction du graphique) et commentez. Nous venons d'établir que le taux de croissance du capital par tête est donné par la différence entre l'investissement brut par unité de capital et le taux de dépréciation du capital par tête. L'investissement par unité de capital, $sk^{\alpha-1}$, est une fonction monotone décroissante de k à cause de l'hypothèse sur les rendements décroissants du capital. On montre facilement que la courbe représentative de l'investissement par unité de capital admet deux asymptotes, verticale et horizontale, en zéro et plus l'infini¹. Par ailleurs le taux de dépréciation est constant, il est donc graphiquement représenté par une droite horizontale. La figure 1 donne une représentation graphique du taux de croissance. On observe que le taux de croissance est, en valeur absolue, d'autant plus important que l'économie est éloignée de l'état stationnaire. **(6)** Calculez l'état stationnaire du modèle (pour le capital par tête, la production par tête et la consommation par tête). À l'état stationnaire l'investissement par tête est égal à la dépréciation du capital par tête (de sorte que la variation du stock est nulle). L'état stationnaire, k^* , doit donc être une solution de :

$$sk^{\alpha-1} = (n + \delta)$$

1. On vérifie que $\lim_{k \rightarrow 0} sk^{\alpha-1} = \infty$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} sk^{\alpha-1} = 0$. Ces comportements aux bords sont conséquences des conditions d'Inada.

En excluant la solution nulle, on trouve l'unique solution strictement positive :

$$k^* = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En substituant dans la fonction de production par tête, on obtient l'état stationnaire de la production par tête :

$$y^* = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Enfin, sachant que les ménages consomment une fraction $1 - s$ du revenu (de la production), il vient :

$$c^* = (1 - s) \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

(7) Quel est le rapport entre l'état stationnaire du stock de capital par tête et le niveau de long terme du capital par tête ? Justifiez votre réponse. **L'état stationnaire est le long terme du modèle.** En effet, nous voyons clairement sur la figure 1 que pour toute condition initiale du stock de capital par tête celui-ci se dirige vers k^* puisque le stock de capital s'accroît si et seulement si son niveau est inférieur à k^* . **(8.a)** Quel est le taux de croissance du produit par tête à court et à long terme ? On montre facilement (voir le cours) que le taux de croissance du produit par tête est donné par :

$$g_y = \alpha g_k$$

Ce résultat n'est valable que pour la fonction de production Cobb-Douglas. Plus généralement, le taux de croissance du produit par tête est égal au taux de croissance du capital par tête multiplié par l'élasticité de la production par rapport au stock de capital physique (il se trouve que dans le cas Cobb-Douglas cette élasticité est constante et égale à α). Comme à long terme l'économie atteint son état stationnaire, le taux de croissance du produit par tête est alors nécessairement nul. Pour obtenir le taux de croissance de y pendant la transition on peut substituer l'expression de g_k dans la dernière équation :

$$g_y = \alpha (sk^{\alpha-1} - (n + \delta))$$

soit encore :

$$g_y = \alpha \left(sy^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (n + \delta) \right)$$

À nouveau, on retrouve, pour la production par tête, la relation décroissante entre croissance et niveau (si on n'oublie pas que $\alpha < 1$). **(8.b)** Quel est le taux de croissance du produit à court et à long terme ? On sait que le taux de croissance d'un produit de variable est égal à la somme des taux de croissance des deux variables. Puisque $Y = yL$, la production totale est égale à la production par tête fois le nombre de tête, nous avons :

$$g_Y = g_y + n$$

À long terme le taux de croissance de Y est déterminé par la croissance démographique (n), à court terme nous avons :

$$g_Y = \alpha \left(s y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (n + \delta) \right) + n$$

(9) Montrez que ce modèle prédit une relation décroissante entre le taux de croissance du produit par tête et le niveau du produit par tête. Quelle est l'hypothèse au centre de cette prédiction ? **On a montré plus haut que :**

$$g_y = \alpha \left(s y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (n + \delta) \right)$$

En notant que, par définition de l'état stationnaire, nous pouvons réécrire $n + \delta$ comme :

$$n + \delta = s y^{\star \frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

on peut réécrire le taux de croissance de y de la façon suivante :

$$g_y = \alpha s \left(y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - y^{\star \frac{\alpha-1}{\alpha}} \right)$$

ou encore :

$$g_y = \alpha s y^{\star \frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\left(\frac{y}{y^{\star}} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1 \right)$$

ou plus simplement :

$$g_y = \alpha(n + \delta) \left(\left(\frac{y}{y^{\star}} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1 \right)$$

Dans cette dernière expression du taux de croissance on voit clairement que celui-ci est une fonction décroissante de la distance à l'état stationnaire, $y/y^{\star}$, puisque $\alpha < 1$. Ce résultat est donc la conséquence de l'hypothèse de rendements décroissants du stock de capital physique. Dans une économie initialement pauvre (en capital physique) le rendement de l'investissement est plus important que dans une économie initialement riche. Ainsi le surcroît de production induit par un même investissement, et donc la croissance, sera plus important dans un pays pauvre que dans un pays riche. (10) Que pouvez-vous dire de la dynamique du capital par tête ou du produit par tête lorsque $\alpha = 1$? Avec $\alpha = 1$ on abandonne l'hypothèse de rendements décroissants du capital, la production par tête est linéaire par rapport au stock de capital par tête. Dans ce cas, le taux de croissance du capital est simplement donné par :

$$g_k(t) = s - (n + \delta)$$

En abandonnant l'hypothèse de rendements décroissants, on perd la relation décroissante entre le taux de croissance et le niveau. Dans ce modèle, le taux de croissance est même constant (il ne dépend que des taux d'épargne, de croissance de la population et de dépréciation)! Cela a plusieurs conséquences. Puisque le taux de croissance est constant et positif (on suppose que le taux d'épargne est assez important dans le sens où $s > n + \delta$) le modèle n'admet plus d'état stationnaire pour les variables par tête. Ici les variables par tête croissent à long terme, même en l'absence de progrès technique. Si toutes les économies

sont structurellement homogènes alors elles ont toutes le même taux de croissance. Ainsi nous perdons aussi la propriété de convergence des économies ; il n'y a pas de rattrapage, si les économies ont des conditions initiales différentes les écarts persistent indéfiniment.

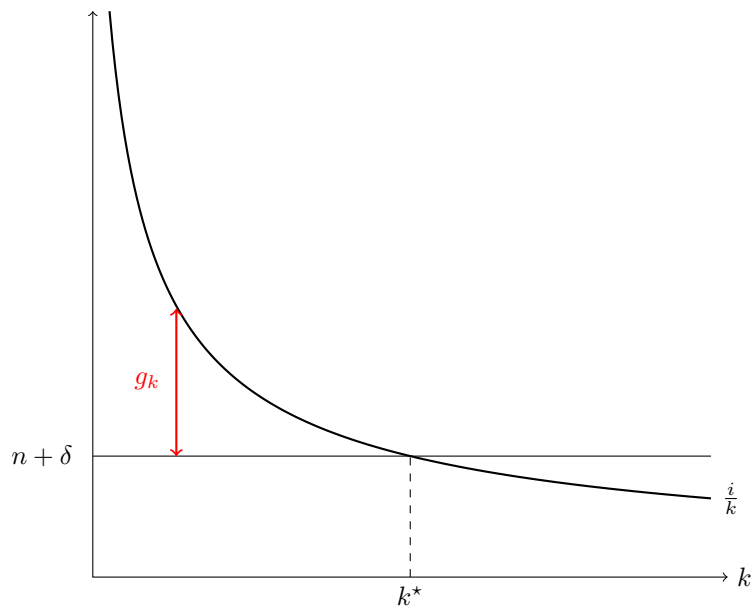


FIGURE 1 – Taux de croissance du capital physique par tête.