

# Croissance

## Modèle de Solow avec capital humain

Stéphane Adjemian

`stephane.adjemian@univ-lemans.fr`

Novembre 2022

- ▶ Le modèle de Solow, n'est pas quantitativement satisfaisant :
  - ▶ Les élasticités ont les signes attendus mais les restrictions sur celles-ci sont rejetés par les données.
  - ▶ La vitesse de convergence est bien positive, mais elle est moins importante que suggéré par le modèle.
- ▶ Pour rapprocher la vitesse de convergence théorique de nos mesures, il faudrait pouvoir accroître la valeur de  $\alpha$ , c'est-à-dire réduire la rémunération du travail dans la valeur ajoutée.

$$\beta = (1 - \alpha)(n + x + \delta)$$

- ▶ Le salaire ne rémunère pas seulement le travail, mais aussi un capital attaché au travailleur : le capital humain. Une part du salaire rémunère l'éducation et l'expérience accumulée par le travailleur.
- ▶ On devrait pouvoir réduire la vitesse de convergence théorique en incluant explicitement l'éducation comme un nouveau facteur accumulable.

# Deux stocks

- ▶ Deux facteurs accumulables :
  - ▶  $K$  le stock de capital physique.
  - ▶  $H$  le stock de capital humain

⇒ Épargne dans ces deux facteurs :

$$\begin{cases} s_K \in [0, 1] & \text{taux d'épargne en capital physique,} \\ s_H \in [0, 1] & \text{taux d'épargne en capital humain.} \end{cases}$$

- ▶ On suppose aussi que  $s_K + s_H < 1$ , afin que la consommation soit positive.
- ▶ L'investissement dans le capital humain, comme dans le capital physique, est mesuré en termes d'unités de bien homogène.

# Une fonction de production à trois facteurs

- ▶ On suppose que la technologie de production commune est Cobb-Douglas à rendements constants :

$$Y = K^\alpha H^\lambda (AL)^{1-\alpha-\lambda}$$

- ▶ Les élasticités  $\alpha$  et  $\lambda$  sont positives et inférieures à un  $\Rightarrow$  Les rendements marginaux par rapport au capital physique et au capital humain sont positifs et décroissants.
  - ▶ On suppose aussi que  $\alpha + \lambda < 1$ , autrement la production serait décroissante par rapport à la quantité de travail efficace.
- $\Rightarrow$  Le rendement marginal par rapport aux deux stocks est décroissant (si on multiplie  $K$  et  $L$  par  $\mu > 1$ , le facteur de croissance de la production est inférieur à  $\mu$ ).

# Dynamiques

- ▶ Les dynamiques de la population et de l'efficacité du travail sont inchangées :

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n > 0 \quad \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = x$$

- ▶ Lois d'évolution des stocks :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) &= s_K Y(t) - \delta K(t) \\ \dot{H}(t) &= s_H Y(t) - \delta H(t) \end{cases}$$

- ▶ La seule différence ici est le taux d'épargne, spécifique à chaque type de capital.
- ▶ Nous supposons que le taux de dépréciation est le même pour les deux stocks. Nous pourrions relâcher cette hypothèse, mais, in fine, pour l'analyse empirique nous ne pourrions distinguer des deux.

# Équations fondamentales du modèle de Solow (1)

- ▶ Comme dans les chapitres II et III, on stationarise le modèle pour étudier la dynamique des variables.
- ▶ On veut déterminer la dynamique des stocks (capital physique et capital humain) par tête efficace  $\hat{k} = K/(AL)$  et  $\hat{h} = H/(AL) \Rightarrow$  Un système de deux équations différentielles.
- ▶ On a :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}} &= \frac{\dot{K}}{AL} - (n+x)\hat{k} \\ &= \frac{s_K Y - \delta K}{AL} - (n+x)\hat{k} \\ &= s_K \hat{y} - (n+x+\delta)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{h}} &= \frac{\dot{H}}{AL} - (n+x)\hat{h} \\ &= \frac{s_H Y - \delta H}{AL} - (n+x)\hat{h} \\ &= s_H \hat{y} - (n+x+\delta)\hat{h}\end{aligned}$$

# Équations fondamentales du modèle de Solow (2)

- ▶ La production par tête efficace est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \frac{K^\alpha H^\lambda (AL)^{1-\alpha-\lambda}}{AL} \\ &= \left(\frac{K}{AL}\right)^\alpha \left(\frac{H}{AL}\right)^\lambda \left(\frac{AL}{AL}\right)^{1-\alpha-\lambda} \\ &= \hat{k}^\alpha \hat{h}^\lambda\end{aligned}$$

- ▶ En substituant dans les équations pour les variations de  $\hat{k}$  et  $\hat{h}$ , on obtient le système suivant d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}} &= s_K \hat{k}^\alpha \hat{h}^\lambda - (n + x + \delta) \hat{k} \\ \dot{\hat{h}} &= s_H \hat{k}^\alpha \hat{h}^\lambda - (n + x + \delta) \hat{h} \end{cases}$$

# Équations fondamentales du modèle de Solow (3)

- ▶ La variation du stock de capital physique par tête efficace dépend du niveau du stock de capital physique par tête efficace **et aussi** du niveau du stock de capital humain par tête efficace.
  - ▶ La variation du stock de capital humain par tête efficace dépend du niveau du stock de capital humain par tête efficace **et aussi** du niveau du stock de capital physiques par tête efficace.
- ⇒ Effets croisés, potentiellement non triviaux.
- ▶ Le stock de capital physique (resp. humain) par tête efficace s'accroît si et seulement si l'investissement en capital physique (resp. humain) est supérieur à la dépréciation du capital physique (humain).
  - ▶ Le niveau d'investissement en capital physique ou humain dépend des niveaux de capital physique **et** capital humain.

# État stationnaire (1)

- ▶ À l'état stationnaire on doit avoir :  $\dot{\hat{k}} = \dot{\hat{h}} = 0$ .
- ▶ L'état stationnaire  $(\hat{h}^*, \hat{k}^*)$  doit vérifier :

$$\begin{cases} s_K \hat{k}^{*\alpha} \hat{h}^{*\lambda} &= (n + x + \delta)\hat{k}^* \\ s_H \hat{k}^{*\alpha} \hat{h}^{*\lambda} &= (n + x + \delta)\hat{h}^* \end{cases}$$

- ▶ En excluant la solution triviale, où  $\hat{h}^* = \hat{k}^* = 0$ , on peut diviser la première équation par la seconde et on obtient :

$$\frac{\hat{k}^*}{\hat{h}^*} = \frac{s_K}{s_H}$$

- ▶ L'état stationnaire de  $\hat{k}$  est d'autant plus important relativement à celui de  $\hat{h}$  que le taux d'épargne en capital physique est grand par rapport au taux d'épargne en capital humain.

## État stationnaire (2)

⇒ À long terme, les taux de croissance de  $k$  et  $h$  sont identiques.

- ▶ En substituant  $\hat{k}^* = (s_K/s_H)\hat{h}^*$  dans la seconde équation du système, on obtient une équation dont la seule inconnue est  $\hat{h}^*$  :

$$s_H \left( \frac{s_K}{s_H} \hat{h}^* \right)^\alpha \hat{h}^{*\lambda} = (n + x + \delta) \hat{h}^*$$

$$\Leftrightarrow s_K^\alpha s_H^{1-\alpha} \hat{h}^{*\alpha+\lambda} = (n + x + \delta) \hat{h}^*$$

$$\Leftrightarrow \hat{h}^{*1-\alpha-\lambda} = \frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n + x + \delta}$$

d'où finalement :

$$\hat{h}^* = \left( \frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n + x + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\lambda}}$$

## État stationnaire (3)

- ▶ De la même façon, en substituant  $\hat{h}^* = (s_H/s_K)\hat{k}^*$  dans la première équation du système, on obtient :

$$\hat{k}^* = \left( \frac{s_K^{1-\lambda} s_H^\lambda}{n+x+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\lambda}}$$

- ▶ En substituant, les expressions pour  $\hat{h}^*$  et  $\hat{k}^*$  dans la fonction de production par tête efficace, on obtient :

$$\hat{y}^* = \left( \frac{s_K^{1-\lambda} s_H^\lambda}{n+x+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} \left( \frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n+x+\delta} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}}$$

## État stationnaire (3)

- ▶ De la même façon, en substituant  $\hat{h}^* = (s_H/s_K)\hat{k}^*$  dans la première équation du système, on obtient :

$$\hat{k}^* = \left( \frac{s_K^{1-\lambda} s_H^\lambda}{n+x+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\lambda}}$$

- ▶ En substituant, les expressions pour  $\hat{h}^*$  et  $\hat{k}^*$  dans la fonction de production par tête efficace, on obtient :

$$\hat{y}^* = \left( \frac{s_K^{1-\lambda} s_H^\lambda}{n+x+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} \left( \frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n+x+\delta} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}}$$

## État stationnaire (4)

- ▶ La production par tête à l'état stationnaire peut s'écrire :

$$\hat{y}^* = s_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} s_H^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}} (n + x + \delta)^{-\frac{\alpha+\lambda}{1-\alpha-\lambda}}$$

- ▶  $\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}$  s'interprète comme l'élasticité de  $\hat{y}^*$  par rapport à  $s_K$ .
- ▶  $\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda} > \frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow$  Augmenter le modèle de Solow avec le capital humain accroît la sensibilité du niveau de long terme de la production par tête par rapport au taux d'épargne en capital physique.
- ▶ Idem par rapport au taux de dépréciation du stock de capital par tête.
- ▶ Le modèle va pouvoir, a priori, expliquer une plus grande part de l'hétérogénéité des niveaux de long terme. On verra plus loin qu'il en va de même pour les taux de croissance.

## État stationnaire (5)

- ▶ Comme dans le chapitre II,  $\hat{y}^*$  est une fonction décroissante du taux de dépréciation du capital par tête efficace.
- ▶ Une augmentation du taux d'épargne (en capital physique ou humain) induit une augmentation des niveaux de long terme des deux stocks, et donc de la production par tête.
- ▶ Comme dans le chapitre II, l'effet d'une variation des taux d'épargne sur la consommation à long terme est ambiguë :

$$\hat{c}^* = (1 - s_K - s_H) s_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\lambda}} s_H^{\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda}} (n + x + \delta)^{-\frac{\alpha+\lambda}{1-\alpha-\lambda}}$$

- ▶ Mais on peut montrer qu'il est possible de définir un comportement d'épargne qui maximise le niveau de la consommation à long terme. La règle d'or, dans ce modèle, est  $s_{K,or} = \alpha$  et  $s_{H,or} = \lambda$ .

# Représentation graphique de la transition (1)

- ▶ Il n'est plus possible de représenter aussi simplement la dynamique de  $\hat{k}$  sur une demi-droite, comme dans le chapitre II où la dynamique du modèle se résumait à la dynamique de  $\hat{k}$ .
- ▶ Ici, il faut que nous suivions simultanément deux variables,  $\hat{k}$  et  $\hat{h}$ , dont les dynamiques sont interdépendantes.
- ▶ Nous allons représenter la dynamique jointe de  $\hat{k}$  et  $\hat{h}$  dans un plan.
- ▶ Puisque ces deux variables sont positives, le plan se réduit à l'orthant positif. Nous devons, en chaque point de ce plan, déterminer les signes de  $\dot{\hat{k}}$  et  $\dot{\hat{h}}$ .
- ▶ Nous allons partitionner l'orthant positif en fonction du sens de variation de ces deux variables, ce qui nous donnera une idée assez précise de la dynamique.

## Représentation graphique de la transition (2)

$$\dot{\hat{k}} > 0$$

- ▶ Déterminons l'ensemble des points  $(\hat{h}, \hat{k})$  tels que  $\dot{\hat{k}} > 0$ .
- ▶ Nous savons que le stock de capital physique par tête efficace s'accroît si et seulement si :

$$s_K \hat{k}^\alpha \hat{h}^\lambda - (n + x + \delta) \hat{k} > 0$$

$$\Leftrightarrow s_K \hat{h}^\lambda > (n + x + \delta) \hat{k}^{1-\alpha} \quad \text{en supposant } \hat{k} > 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{k} < \left( \frac{s_K}{n + x + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \hat{h}^{\frac{\lambda}{1-\alpha}} \equiv \varphi_{\hat{k}}(\hat{h})$$

où  $\frac{\lambda}{1-\alpha} < 1$  car  $\alpha + \lambda < 1$ .

- ▶  $\varphi_{\hat{k}}(\hat{h})$  est une fonction monotone croissante et concave (car la puissance sur  $\hat{h}$  est inférieure à un). On a  $\lim_{\hat{h} \rightarrow 0^+} \varphi_{\hat{k}}(\hat{h}) = 0$  et  $\lim_{\hat{h} \rightarrow \infty} \varphi_{\hat{k}}(\hat{h}) = \infty$ .

## Représentation graphique de la transition (3)

$$\hat{h} > 0$$

- ▶ Déterminons l'ensemble des points  $(\hat{h}, \hat{k})$  tels que  $\dot{\hat{h}} > 0$ .
- ▶ Nous savons que le stock de capital physique par tête efficace s'accroît si et seulement si :

$$s_H \hat{k}^\alpha \hat{h}^\lambda - (n + x + \delta) \hat{h} > 0$$

$$\Leftrightarrow s_H \hat{k}^\alpha > (n + x + \delta) \hat{h}^{1-\lambda} \quad \text{en supposant } \hat{h} > 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{k} > \left( \frac{n + x + \delta}{s_H} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \hat{h}^{\frac{1-\lambda}{\alpha}} \equiv \varphi_{\hat{h}}(\hat{h})$$

où  $\frac{1-\lambda}{\alpha} > 1$  car  $\alpha + \lambda < 1$ .

- ▶  $\varphi_{\hat{k}}(\hat{h})$  est une fonction monotone croissante et convexe (car la puissance sur  $\hat{h}$  est inférieure à un). On a  $\lim_{\hat{h} \rightarrow 0^+} \varphi_{\hat{k}}(\hat{h}) = 0$  et  $\lim_{\hat{h} \rightarrow \infty} \varphi_{\hat{k}}(\hat{h}) = \infty$ .

# Représentation graphique de la transition (4)

$\dot{\hat{k}} > 0$  et  $\dot{\hat{h}} > 0$

► On a :

$$\dot{\hat{k}} > 0 \Leftrightarrow \hat{k} < \varphi_{\hat{k}}(\hat{h})$$

et

$$\dot{\hat{h}} > 0 \Leftrightarrow \hat{k} > \varphi_{\hat{h}}(\hat{h})$$

► Partitionnement du plan en quatre régions :

$$\text{I } \dot{\hat{k}} > 0 \wedge \dot{\hat{h}} > 0 \Leftrightarrow \hat{k} < \varphi_{\hat{k}}(\hat{h}) \wedge \hat{k} > \varphi_{\hat{h}}(\hat{h})$$

$$\text{II } \dot{\hat{k}} < 0 \wedge \dot{\hat{h}} > 0 \Leftrightarrow \hat{k} > \varphi_{\hat{k}}(\hat{h}) \wedge \hat{k} > \varphi_{\hat{h}}(\hat{h})$$

$$\text{III } \dot{\hat{k}} < 0 \wedge \dot{\hat{h}} < 0 \Leftrightarrow \hat{k} > \varphi_{\hat{k}}(\hat{h}) \wedge \hat{k} < \varphi_{\hat{h}}(\hat{h})$$

$$\text{IV } \dot{\hat{k}} > 0 \wedge \dot{\hat{h}} < 0 \Leftrightarrow \hat{k} < \varphi_{\hat{k}}(\hat{h}) \wedge \hat{k} < \varphi_{\hat{h}}(\hat{h})$$

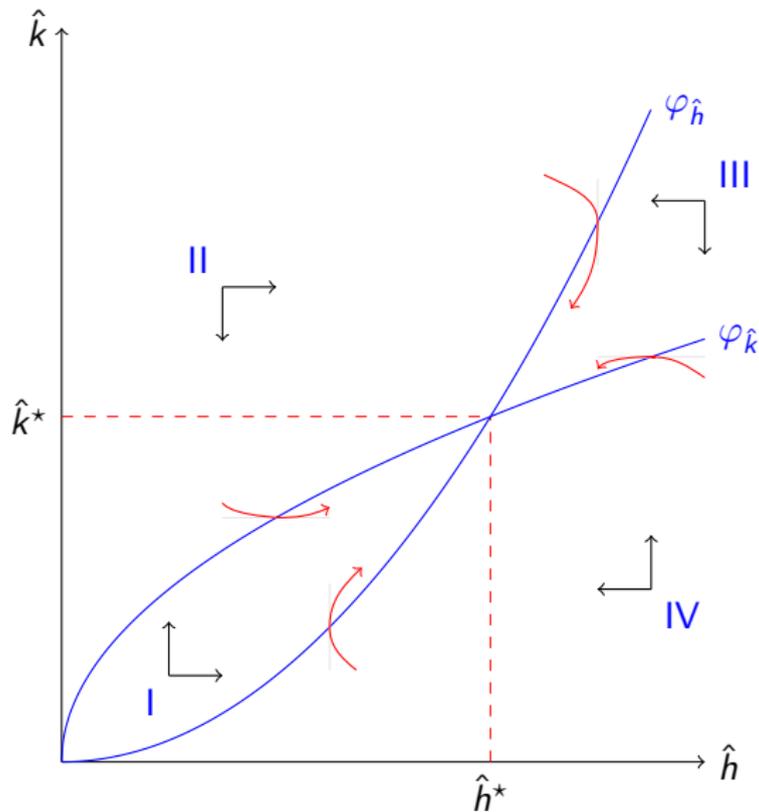
## Représentation graphique de la transition (5)

$$\dot{\hat{k}} = 0 \text{ et } \dot{\hat{h}} = 0$$

- ▶ Le long de la frontière  $\varphi_{\hat{k}}$  les variations de  $\hat{k}$  sont nulles.
- ▶ Le long de la frontière  $\varphi_{\hat{h}}$  les variations de  $\hat{h}$  sont nulles.
- ▶ À l'intersection des deux frontières on a  $\dot{\hat{k}} = 0$  et  $\dot{\hat{h}} = 0 \Rightarrow$  État stationnaire  $(\hat{h}^*, \hat{k}^*)$ .
- ▶ On doit passer la frontière  $\varphi_{\hat{k}}$  horizontalement, car localement les variations de  $\hat{k}$  sont nulles.
- ▶ On doit passer la frontière  $\varphi_{\hat{h}}$  verticalement, car localement les variations de  $\hat{h}$  sont nulles.
- ▶ On ne peut aller de I en II ou IV. On ne peut aller de III en II ou IV. Les régions I et III sont des trappes qui mènent à l'état stationnaire.

# Représentation graphique de la transition (6)

Diagramme des phases



## Représentation graphique de la transition (7)

- ▶ Si la condition initiale est dans la région I (resp. III), l'économie reste dans cette région et les stocks croissent (resp. décroissent), l'économie rejoint l'état stationnaire à long terme.
- ▶ Si la condition initiale est dans la région II l'économie converge vers l'état stationnaire mais les dynamiques ne sont pas nécessairement monotones :
  - ▶ L'économie reste toujours dans la région II (le long de la transition vers l'état stationnaire  $\hat{k}$  décroît et  $\hat{h}$  croît).
  - ▶ L'économie passe dans la région I (le long de la transition vers l'état stationnaire  $\hat{h}$  croît mais  $\hat{k}$  décroît puis croît après le passage en région I).
  - ▶ L'économie passe dans la région III (le long de la transition vers l'état stationnaire  $\hat{k}$  décroît mais  $\hat{h}$  croît puis décroît après le passage en région III).
- ▶ Discussion analogue si la condition initiale est dans la région IV.
- ▶ L'état stationnaire est toujours le long terme de l'économie.

# Dynamique de la production par tête efficace (1)

- ▶ La dynamique de la production par tête efficace est-elle monotone ?
- ▶ Difficile à dire en toute généralité avec le modèle non linéaire.
- ▶ Puisque la fonction de production est de type Cobb-Douglas, on a :

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \alpha \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} + \lambda \frac{\dot{\hat{h}}}{\hat{h}}$$

- ▶ Si l'économie est dans les régimes I ou III, la trajectoire du produit par tête efficace est monotone.
- ▶ Autrement, il est difficile de conclure, cela dépend de la comparaison des taux de croissance de  $\hat{k}$  et  $\hat{h}$ , mais aussi des valeurs des élasticités  $\alpha$  et  $\lambda$ .
- ▶ On peut se faire une idée en simulant le modèle à l'aide d'un ordinateur.

## Dynamique de la production par tête efficace (2)

- ▶ On peut très simplement simuler le modèle à l'aide d'un code en Python et de la librairie Scipy qui propose des algorithmes pour résoudre des systèmes d'équations différentielles.
- ▶ Une fonction pour définir le problème à résoudre :

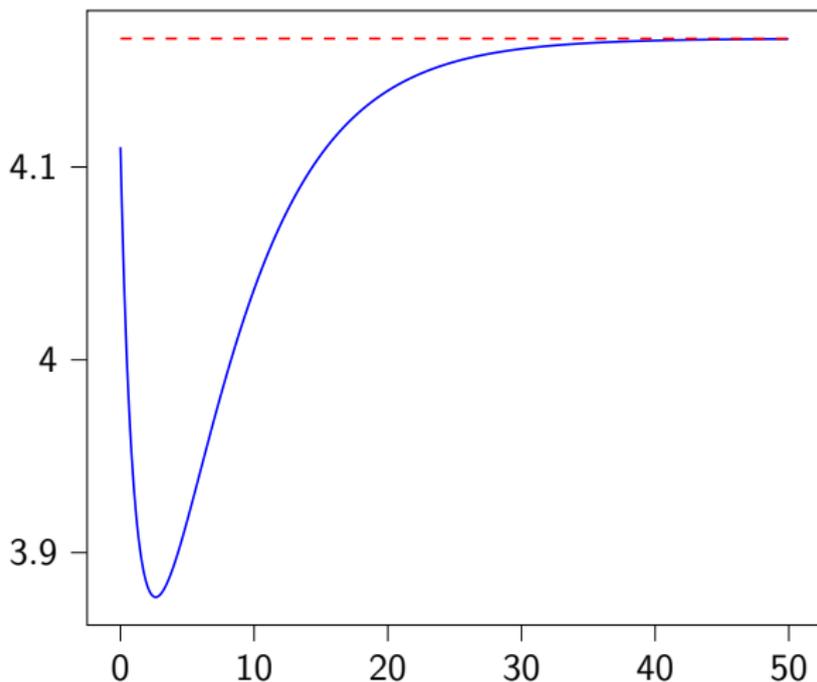
```
1 def dotVariables(X, t, alpha, lambda, sK, sH, n, x, delta):
2     y = X[0]**alpha * X[1]**lambda # production par tête efficace
3     dX = np.zeros(2)
4     dX[0] = sK*y - (n+x+delta)*X[0] # variation de khat
5     dX[1] = sH*y - (n+x+delta)*X[1] # variation de hhat
6     return dX
```

```
1 def dotVariables(X, t, alpha, lambda, sK, sH, n, x, delta):
2     y = np.exp(X[0]*alpha+X[1]*lambda)
3     dX = np.zeros(2)
4     dX[0] = sK*y - (n+x+delta)*np.exp(X[0])
5     dX[1] = sH*y - (n+x+delta)*np.exp(X[1])
6     return dX
```

# Dynamique de la production par tête efficace (3)

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 # Discrétisation du temps et étalonnage
6 t = np.linspace(0, 70, 100000)
7 alpha = lambda = .3333333333
8 sK, sH = .15, .10
9 n = x = delta = .02
10
11 # État stationnaire
12 kstar = (sK**(1-lambda)*sH**lambda/(n+x+d))**(1/(1-alpha-lambda))
13 hstar = (sK**alpha*sH**(1-alpha)/(n+x+d))**(1/(1-alpha-lambda))
14 ystar = kstar**alpha*hstar**lambda
15
16 # Conditions initiales (en logarithme)
17 X0 = np.array([np.log(1.6*kstar), np.log(0.6*hstar)])
18
19 # Résolution de l'équation différentielle
20 Paths = odeint(dotVariables, X0, t, args=(alpha, lambda, sK, sH, n, x, delta))
21 khat, hhat, = np.exp(Paths[:,0]), np.exp(Paths[:,1])
22 yhat = khat**alpha * hhat**lambda
23
24 s = t[t<=50]
25 plt.plot(s, yhat[0:s.size])
26 plt.plot([0, s[s.size-1]], [ystar, ystar])
```

## Dynamique de la production par tête efficace (4)



**Figure 1 – Transition de la production par tête efficace**, avec  $\hat{k}(0) = 1,6\hat{k}^*$  et  $\hat{h}(0) = 0,6\hat{h}^*$  (voir le code pour les valeurs des paramètres).

## Dynamique de la production par tête efficace (5)

- ▶ La trajectoire de la production par tête efficace n'est pas monotone.
  - ▶ Dans cette simulation, l'économie est initialement dans la région II puis passe dans la région I avant de converger vers l'état stationnaire non trivial.
  - ▶ La trajectoire de  $\hat{h}$  est monotone, ses variations sont toujours positives, mais les trajectoires de  $\hat{k}$  et  $\hat{y}$  sont décroissantes puis croissantes.
  - ▶ L'économie (en termes de production par tête efficace) commence donc par s'éloigner de l'état stationnaire puis s'en rapproche.
- ⇒ L'économie diverge temporairement !
- ▶ Cela suggère qu'il est possible de mesurer de la divergence, même si à plus long terme les économies convergent.

# Approximation de la dynamique (1)

- ▶ Pour amener le modèle aux données, comme dans le chapitre III, nous allons approximer le modèle avec un développement de Taylor à l'ordre 1.
- ▶ Supposons que nous souhaitions approximer le système :

$$\dot{X}(t) = F(X(t))$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $F$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  continue et dérivable. On suppose qu'il existe un état stationnaire  $X^*$ .

- ▶ On a alors :

$$\dot{X}(t) \approx F(X^*) + J_F(X^*)(X(t) - X^*)$$

pour  $X$  proche (dans un sens qu'il faudrait définir) de  $X^*$ , où  $J_F(X^*)$  est la matrice jacobienne  $n \times n$  qui regroupe les dérivées partielles évaluées à l'état stationnaire.

## Approximation de la dynamique (2)

- ▶ Comme à l'état stationnaire les variations sont nulles, on doit avoir  $F(X^*) = 0$  et donc :

$$\dot{X}(t) \approx J_F(X^*)(X(t) - X^*)$$

- ▶ Posons  $\mathcal{X}(t) = X(t) - X^*$  la déviation à l'état stationnaire, comme l'état stationnaire est constant on doit avoir  $\dot{X}(t) = \dot{\mathcal{X}}(t)$  et donc :

$$\dot{\mathcal{X}}(t) \approx J_F(X^*)\mathcal{X}(t)$$

- ▶ On peut résoudre ce système d'équations en résolvant  $n$  équations différentielles linéaires à coefficients constants et sans second membre.
- ▶ Il suffit de diagonaliser la matrice  $J_F(X^*)$  (au pire on peut triangulariser la matrice), c'est-à-dire réécrire la matrice jacobienne :

$$J_F(X^*) = P\Delta P^{-1}$$

où  $\Delta$  est une matrice diagonale (avec les valeurs propre de  $J_F(X^*)$  le long de la diagonale) et  $P$  une matrice de changement de base (formée avec les vecteurs propres associés).

## Approximation de la dynamique (3)

- ▶ En substituant la factorisation de la matrice jacobienne dans le système :

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{X}}(t) &= P\Delta P^{-1}\mathcal{X}(t) \\ \Leftrightarrow P^{-1}\dot{\mathcal{X}}(t) &= \Delta P^{-1}\mathcal{X}(t) \\ \Leftrightarrow \dot{\mathcal{Z}}(t) &= \Delta\mathcal{Z}(t)\end{aligned}$$

où  $\mathcal{Z}(t)$  est un vecteur  $n \times 1$  formé de  $n$  combinaisons linéaires (indépendantes) de  $\mathcal{X}(t)$  définies par les lignes de la matrice  $P^{-1}$ .

- ▶ Puisque la matrice  $\Delta$  est diagonale, nous avons maintenant un système de  $n$  EDL indépendantes à coefficients constants sans second membre à résoudre. Nous savons déjà résoudre ces équations.
- ▶ En notant  $\dot{z}_i(t) = \delta_i z_i(t)$  la  $i$ -ème équation, on obtient  $z_i(t) = e^{\delta_i t}$ .
- ▶ On peut revenir à  $\mathcal{X}(t)$  en prémultipliant  $\mathcal{Z}(t)$  par  $P$ .

## Approximation de la dynamique (4)

- ▶ Dans notre modèle, la matrice jacobienne est donnée par :

$$J_F(X) = \begin{pmatrix} s_K \alpha \frac{\hat{y}}{k} - (n + x + \delta) & s_K \lambda \frac{\hat{y}}{k} \\ s_H \alpha \frac{\hat{y}}{k} & s_H \lambda \frac{\hat{y}}{k} - (n + x + \delta) \end{pmatrix}$$

- ▶ Nous devons évaluer cette matrice à l'état stationnaire. En notant que  $\frac{\hat{y}^*}{k^*} = \frac{n+x+\delta}{s_K}$  et  $\frac{\hat{y}^*}{h^*} = \frac{n+x+\delta}{s_H}$ , on montre facilement que :

$$J_F(X^*) = -(n + x + \delta) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\lambda \frac{s_K}{s_H} \\ -\alpha \frac{s_H}{s_K} & 1 - \lambda \end{pmatrix}}_{J^*}$$

- ▶ Le polynôme caractéristique associé à  $J^*$  est

$$\chi(a) = |J^* - aI_2| = a^2 - (2 - \alpha - \lambda)a + 1 - \alpha - \lambda$$

- ▶ Les valeurs propres de  $J^*$  (racines du polynôme caractéristique) sont  $a_1 = 1 - \alpha - \lambda$  et  $a_2 = 1$ .

## Approximation de la dynamique (5)

- ▶ On note  $v_i$  le vecteur propre associé à  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ), il doit vérifier :

$$(J^* - a_i I_2)v_i = 0_2$$

- ▶ On trouve :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{s_K}{s_H} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{s_K}{s_H} \\ \frac{\alpha}{\lambda} \end{pmatrix}$$

- ▶ La matrice de changement de base et son inverse sont donc :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{s_K}{s_H} & -\frac{s_K}{s_H} \\ 1 & \frac{\alpha}{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \frac{s_H}{s_K} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\lambda} & \frac{s_K}{s_H} \\ -1 & \frac{s_K}{s_H} \end{pmatrix}$$

## Approximation de la dynamique (6)

- ▶ On définit  $\mathcal{Z}(t) = (z_1(t), z_2(t))$  de la façon suivante :

$$\mathcal{Z}(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} \hat{k}(t) - \hat{k}^* \\ \hat{h}(t) - \hat{h}^* \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{Z}(t) = \frac{1}{\alpha + \lambda} \begin{pmatrix} \alpha \frac{\hat{h}^*}{\hat{k}^*} (\hat{k}(t) - \hat{k}^*) + \lambda (\hat{h}(t) - \hat{h}^*) \\ -\lambda \frac{\hat{h}^*}{\hat{k}^*} (\hat{k}(t) - \hat{k}^*) + \lambda (\hat{h}(t) - \hat{h}^*) \end{pmatrix}$$

- ▶ Le vecteur  $\mathcal{Z}$  vérifie :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) &= -(1 - \alpha - \lambda)(n + x + \delta)z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) &= -(n + x + \delta)z_2(t) \end{cases}$$

## Approximation de la dynamique (7)

- ▶ En résolvant ces deux équations on trouve :

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{\alpha + \lambda} \begin{pmatrix} \left[ \alpha \frac{\hat{h}^*}{\hat{k}^*} \tilde{k}(0) + \lambda \tilde{h}(0) \right] e^{-(1-\alpha-\lambda)(n+x+\delta)t} \\ \left[ -\lambda \frac{\hat{h}^*}{\hat{k}^*} \tilde{k}(0) + \lambda \tilde{h}(0) \right] e^{-(n+x+\delta)t} \end{pmatrix}$$

où  $\tilde{k}(t) = \hat{k}(t) - \hat{k}^*$  et  $\tilde{h}(t) = \hat{h}(t) - \hat{h}^*$ .

- ▶ En prémultipliant par  $P$  on obtient les variables d'origine :

$$\check{k}(t) = \frac{1}{\alpha + \lambda} \left[ (\alpha \check{k}(0) + \lambda \check{h}(0)) e^{-(1-\alpha-\lambda)(n+x+\delta)t} + \lambda (\check{k}(0) - \check{h}(0)) e^{-(n+x+\delta)t} \right]$$

$$\check{h}(t) = \frac{1}{\alpha + \lambda} \left[ (\alpha \check{k}(0) + \lambda \check{h}(0)) e^{-(1-\alpha-\lambda)(n+x+\delta)t} + \alpha (\check{h}(0) - \check{k}(0)) e^{-(n+x+\delta)t} \right]$$

où  $\check{k}(t) = (\hat{k}(t) - \hat{k}^*)/\hat{k}^* \approx \log \frac{\hat{k}(t)}{\hat{k}^*}$ ,  $\check{h}(t) = (\hat{h}(t) - \hat{h}^*)/\hat{h}^* \approx \log \frac{\hat{h}(t)}{\hat{h}^*}$ .

## Approximation de la dynamique (8)

- ▶ Comme attendu  $\lim_{t \rightarrow \infty} \check{k}(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \check{h}(t) = 0$ .
- ▶ En partant de la fonction de production on a aussi :

$$\check{y}(t) = \alpha \check{k}(t) + \lambda \check{h}(t)$$

- ▶ En substituant les solutions pour  $\check{k}$  et  $\check{h}$ , on trouve finalement :

$$\check{y}(t) = \check{y}(0)e^{-(1-\alpha-\lambda)(n+x+\delta)t}$$

- ▶  $\beta = (1 - \alpha - \lambda)(n + x + \delta)$  s'interprète comme la vitesse de convergence dans le modèle de Solow avec capital humain.
- ▶ Dans le modèle approximé les transitions de  $\hat{y}$  sont nécessairement monotones !

## Approximation de la dynamique (9)

- ▶ À l'instant  $t$ , la production par tête efficace est donnée par :

$$\log \hat{y}(t) = \log \hat{y}^* (1 - e^{-\beta t}) + \log \hat{y}(0) e^{-\beta t}$$

- ▶ Le taux de croissance annuel moyen, prédit par le modèle, est donc :

$$\frac{\log \hat{y}(t) - \log \hat{y}(0)}{t} = \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \log \hat{y}^* - \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \log \hat{y}(0)$$

- ▶ En supposant que les économies sont hétérogènes par rapport à  $s_k$ ,  $s_H$ ,  $n$  et les conditions initiales, le taux de croissance de l'économie  $i$  prédit par le modèle est :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\hat{y},i}(0, t) = & \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \frac{\alpha}{1 - \alpha - \lambda} \log s_{K,i} + \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \frac{\lambda}{1 - \alpha - \lambda} \log s_{H,i} \\ & - \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \frac{\alpha + \lambda}{1 - \alpha - \lambda} \log(n_i + x + \delta) \\ & - \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \log \hat{y}_i(0) \end{aligned}$$

# Tester le modèle de Solow avec capital humain (1)

- ▶ On suppose que l'efficacité initiale du travail peut s'écrire comme :

$$\log A_i(0) = a + \varepsilon_i$$

où  $\varepsilon_i$  est une variable aléatoire d'espérance nulle, de variance  $\sigma_A^2$  et orthogonale aux variables explicatives (la condition initiale de la production par tête, les taux d'épargne en capital physique et humain, le taux de croissance de la population).

- ▶ La prédiction pour le taux de croissance annuel moyen de la production par tête est :

$$\begin{aligned}\bar{g}_{y,i}(0, t) = & x + \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} a + \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \frac{\alpha}{1 - \alpha - \lambda} \log s_{K,i} \\ & + \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \frac{\lambda}{1 - \alpha - \lambda} \log s_{H,i} - \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \frac{\alpha + \lambda}{1 - \alpha - \lambda} \log(n_i + x + \delta) \\ & - \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \log y_i(0) + \frac{1 - e^{-\beta t}}{t} \varepsilon_i\end{aligned}$$

## Tester le modèle de Solow avec capital humain (2)

- ▶ Cela suggère le modèle empirique suivant :

$$\bar{g}_{y,i}(0, t) = a_0 + a_1 \log s_{K,i} + a_2 \log s_{H,i} + a_3 \log(n_i + x + \delta) + a_4 \log y_i(0) + u_i$$

- ▶ Sous les hypothèses adoptées, nous pouvons estimer ce modèle par les MCO.
- ▶ Le modèle nous dit que nous devrions avoir :  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 < 0$ ,  $a_4 < 0$  et  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ .
- ▶ À partir de l'estimation de  $a_4$  on peut déduire une estimation de la vitesse de convergence  $\beta$ .
- ▶ À partir des estimations de  $a_1$  et  $a_2$ , on peut déduire des estimations pour les élasticités  $\alpha$  et  $\lambda$ .

# Tester le modèle de Solow avec capital humain (3)

Test de la convergence conditionnelle par Mankiw, Romer et Weil

TABLE V  
TESTS FOR CONDITIONAL CONVERGENCE

Dependent variable: log difference GDP per working-age person 1960–1985			
	Non-oil	Intermediate	OECD
Sample:			
Observations:	98	75	22
CONSTANT	3.04 (0.83)	3.69 (0.91)	2.81 (1.19)
$\ln(Y60)$	-0.289 (0.062)	-0.366 (0.067)	-0.398 (0.070)
$\ln(I/GDP)$	0.524 (0.087)	0.538 (0.102)	0.335 (0.174)
$\ln(n + g + \delta)$	-0.505 (0.288)	-0.551 (0.288)	-0.844 (0.334)
$\ln(SCHOOL)$	0.233 (0.060)	0.271 (0.081)	0.223 (0.144)
$\bar{R}^2$	0.46	0.43	0.65
<i>s.e.e.</i>	0.33	0.30	0.15
Implied $\lambda$	0.0137 (0.0019)	0.0182 (0.0020)	0.0203 (0.0020)

*Note.* Standard errors are in parentheses. Y60 is GDP per working-age person in 1960. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985.  $(g + \delta)$  is assumed to be 0.05. SCHOOL is the average percentage of the working-age population in secondary school for the period 1960–1985.