

# CALCUL ÉCONOMIQUE

(FICHE DE TD N°4)

Stéphane Adjemian \*

Le 28 décembre 2024 à 9:13

**EXERCICE 1** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(i)  $f(x) = \log(x^2 + x^4 + 1)$

(ii)  $g(x) = x^2 \log(x^2 + x^4 + 1)$

(iii)  $h(x) = e^{2x}$

(iv)  $j(x) = \log\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)$

(v)  $k(x) = \cos(\theta x)$

(vi)  $l(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(vii)  $p(x) = x^x$

**EXERCICE 2** Trouver l'expression générale de la dérivée d'ordre  $n$  des fonctions suivantes :

(i)  $f(x) = e^{\theta x}$

(ii)  $g(x) = \frac{1}{x}$

(iii)  $h(x) = \log(x)$

(iv)  $i(x) = \frac{1}{1-x}$

(v)  $j(x) = \frac{1}{1+x}$

(vi)  $k(x) = \frac{1}{1-x^2}$

**EXERCICE 3** Soient  $a, b$  et  $c$  trois paramètres réels. Montrer qu'il existe  $x \in [0, 1]$  tel que  $4ax^3 + bx^2 + 2cx = a + b + c$ .

**EXERCICE 4** Une fonction continue sur  $E$  dont la dérivée s'annule jamais peut-elle être périodique sur  $E$ ?

**EXERCICE 5** Soit  $f$  une fonction dérivable de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  et  $f'$  admettent des dérivées finies en  $+\infty$ . Montrer que la limite de la dérivée doit être nulle.

---

\*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

**EXERCICE 6** Montrer qu'il est possible d'écrire la fonction exponentielle sous la forme :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En déduire une approximation de la constante  $e$ .

**EXERCICE 7** Montrer l'égalité suivante dans un voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^n$$

Quel est le radius de convergence ?.

**EXERCICE 8** Faire une étude de la fonction (en identifiant les optima) :

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$$

**EXERCICE 9** Faire une étude de la fonction :

$$f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$$

**EXERCICE 10** Faire une étude de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$$

**EXERCICE 11** Montrer que si la fonction  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  admet deux extrema, alors l'un est un maximum et l'autre un minimum.

**EXERCICE 12** Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 3x^2}{4e^x + 2x^2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x \log x}{x^2 - x}$

**EXERCICE 13** La somme de deux nombres positifs est égale à 100. Trouver les couples de nombres tels que :

1. Le produit de ces nombres est maximal.
2. La somme des carrés est minimale.