CALCUL ÉCONOMIQUE

ÉLÉMENTS DE CORRECTION (FICHE DE TD N°4)

Stéphane Adjemian*

Le 28 décembre 2024 à 9:13

EXERCICE 1 **(1)** On sait que $(\log u)' = . f'(x) = u'/u$. $f'(x) = (2x+4x^3)/(x^2+x^4+1)$. **(2)** En utilisant le résultat précédant et la règle $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient $g'(x) = 2x\log(x^2 + x^4 + 1) + (2x^3+4x^5)/(x^2+x^4+1)$. **(3)** En utilisation la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient $h'(x) = 2e^x$. **(4)** En utilisant la règle de la dérivée logarithmique, on sait que :

$$j'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^{-1}$$

en utilisant la règle $(u/v)' = (u'v-uv')/v^2$, il vient :

$$j'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-2)}{\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^2}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^{-1}$$

$$j'(x) = x\frac{x^3+3x-2}{\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^3}$$

(5) En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées : $k'(x) = -\theta\sin(\theta x)$. **(6)** Le plus simple est de remarquer que $l(x) = 1 - \frac{1}{x}$, on obtient alors directement la dérivée $l'(x) = \frac{1}{x^2}$. **(7)** La fonction $p(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut la réécrire de façon équivalente : $p(x) = e^{x\log x}$, on a donc : $p'(x) = (x\log x)'e^{x\log x} = (1+\log x)x^x$.

EXERCICE 2 **(1)** On a $f'(x) = \theta e^{\theta x}$, $f''(x) = \theta^2 e^{\theta x}$, $f'''(x) = \theta^3 e^{\theta x}$ et plus généralement on admet que $f^{(n)}(x) = \theta^n e^{\theta x}$. On peut montrer que ce résultat est correcte en raisonnant par récurrence. On sait que la formule est correcte au rang 1 (aussi au rangs 2 et 3). On postule qu'elle est vraie au rang n. Montrons que l'on retrouve nécessairement le même résultat au rang $n+1$. On a :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$$

En substituant la formule au rang n, il vient :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\theta^n e^{\theta x}\right)'$$

*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = \theta^n \left(e^{\theta x}\right)'$$
$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = \theta^n \theta e^{\theta x}$$
$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = \theta^{n+1} e^{\theta x}$$

On retrouve le même résultat qu'au rang n (en remplaçant n par $n+1$). Le résultat énoncé plus haut est donc correcte. **(2)** On a $g'(x) = -1/x^2$, $g''(x) = 2 \times 1/x^3$, $g'''(x) = -3 \times 2 \times 1/x^4$, $g'''(x) = 4 \times 3 \times 2 \times 1/x^5$. Plus généralement, on a :

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \times n! \times 1/x^{(n+1)}$$

On peut montrer ce résultat en utilisant un argument par récurrence. **(3)** On a $h'(x) = 1/x$ et plus généralement $h^{(n)}(x) = g^{(n-1)}(x)$ par définition de la fonction g. **(4)** On a $i'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $i''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $i'''(x) = \frac{2\times 3}{(1-x)^4}$, ... Plus généralement, on postule $i^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Pour montrer que cette formule est correcte, puisqu'elle est vraie au premiers rangs, il suffit de montrer que $i^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$. On a :

$$\begin{aligned} i^{(n+1)}(x) &= \left(i^{(n)}(x)\right)' \\ &= \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)' \\ &= \frac{(n+1)n!}{(1-x)^{n+1+1}} \\ &= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} \end{aligned}$$

(5) On a $j'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $j''(x) = \frac{(-1)^2 2}{(1+x)^3}$, $j'''(x) = \frac{(-1)^3 2\times 3}{(1+x)^4}$, ... Plus généralement, on postule $j^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Pour montrer que cette formule est correcte, puisqu'elle est vraie au premiers rangs, il suffit de montrer que $j^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$. On a :

$$\begin{aligned} j^{(n+1)}(x) &= \left(j^{(n)}(x)\right)' \\ &= \left(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right)' \\ &= \frac{(-1)(n+1)(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}} \end{aligned}$$

(6) On a :

$$k(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$k(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

il nous reste à trouver les coefficients a et b. Par identification, on trouve $a+b=1$ et $a-b=0$. On doit donc avoir $a=b=\frac{1}{2}$, et on peut écrire :

$$k(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

On reconnaît les fonctions $i(x)$ et $j(x)$, on a donc directement :

$$k^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

EXERCICE 3 On remarque que l'équation ressemble à la dérivée d'un polynôme d'ordre 4. On pose $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$ une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable et vérifie $f(0)=f(1)=0$. En appliquant le théorème de Rolle, on sait qu'il existe x entre 0 et 1 tel que $f'(x)=0$, c'est-à-dire tel que $4ax^3+bx^2+2cx=a+b+c$.

EXERCICE 4 La réponse est négative. On dit qu'une fonction f est périodique (voir wikipedia) de période t sur E si pour tout $x\in E$, $x+t\in E$ on a $f(x)=f(x+t)$. D'après le théorème de Rolle, si la fonction est dérivable, il doit exister a entre x et $x+t$ tel que $f'(a)=0$. Donc si la dérivée n'est jamais nulle, la fonction ne peut pas être périodique.

EXERCICE 5 Notons l et l' les limites de f et f' en $+\infty$. Par le théorème des accroissements finis, on sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$ il existe $x<c(x)<x+1$ tel que :

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)&=f'(c(x))\big((x+1)-x\big)\\ \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)&=f'(c(x))\end{aligned}$$

Puisque $c(x)$ est dans l'intervalle $[x,x+1]$, on doit avoir $\lim_{x\to\infty}c(x)=\infty$. On a alors :

$$\begin{gathered}\lim_{x\to\infty}f(x+1)-\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f'(c(x))\\ \Leftrightarrow l-l=\lim_{c(x)\to\infty}f'(x)\\ \lim_{x\to\infty}f'(x)=0\end{gathered}$$

La limite de f' doit être nulle si la limite de f est finie.

EXERCICE 6 On établit le résultat en utilisant le théorème de Taylor dans un voisinage de 0 et en notant que la dérivée d'ordre n de e^x est e^x. On a :

$$e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^0(x-0)^n=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Le radius de convergence est infini pour la fonction exponentielle. En évaluant l'égalité en $x=1$, on obtient :

$$e=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

EXERCICE 7 En utilisant le théorème de Taylor dans un voisinage de 0 et en notant que les dérivées de $1/1-x$ sont :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

il vient :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{1-0}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

On retrouve la série géométrique. Puisque la série n'est définie que si $|x| < 1$ il faut que le radius de convergence soit un.

EXERCICE 8 Puisque le coefficient devant x^3 est négatif, on sait que $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. La dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 2$$

Puisque le discriminant associé est positif :

$$\Delta = 4 + 4 \times 3 \times 2 = 4 \times 7$$

On sait qu'il existe $\underline{x}$ et $\overline{x}$ tels que $f'(\underline{x}) = f'(\overline{x}) = 0$:

$$\underline{x} = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3}$$

$$\overline{x} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}$$

Puisque la parabole est tournée vers le bas (le coefficient sur x^2 est négatif), on sait que la dérivée $f'(x)$ est positive si et seulement si $x \in]\underline{x}, \overline{x}[$. Puisque la dérivée change de signe autour de $\underline{x}$ et $\overline{x}$ on sait que ces deux points sont des optima locaux. La dérivée seconde, $f''(x) = -6x + 2$, est négative (*ie* f est concave) si et seulement si $x > 1/3$. On a donc $f''(\underline{x}) > 0$ et $f''(\overline{x}) < 0$, $\underline{x}$ est un maximum local et $\overline{x}$ est un minimum local.

EXERCICE 9 On commence en notant que le domaine de définition est $\mathbb{R}_+$. La limite en zéro est :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

et pour la limite en l'infini on a une forme indéterminée que l'on peut lever avec la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log x)^2}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$$

qui est encore une forme indéterminée. En appliquant une seconde fois la règle de l'Hospital, il vient :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La dérivée de la fonction f est :

$$f'(x) = \frac{\log(2 - \log x)}{x^2}$$

Cette dérivée est nulle si $x = 1$ ou si $x = e^2$, elle est positive si et seulement si $x \in]1, e^2[$. La fonction f est donc décroissante entre 0 (asymptote verticale) et 1 (minimum) où elle atteint zéro, puis croissante entre 1 et e^2 (maximum local) où elle atteint $4e^{-2}$, et à nouveau décroissante entre e^2 et ∞ où elle retourne vers zéro.

EXERCICE 10 On note que le discriminant du polynôme au dénominateur est négatif, $\Delta = -4$, il n'admet donc pas de racines réelles. Ce polynôme est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$. Puisque le numérateur est non négatif, on a $f(x) \geq 0$ et la fonction est nulle en $x = 0$. On montre facilement que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, car les polynômes au numérateur et dénominateur ont le même ordre. La dérivée est :

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2x + 2) - x^2(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(2 - x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

La dérivée est positive si et seulement si $0 < x < 2$, elle est nulle en $x = 0$ et $x = 2$. La fonction f est donc décroissante entre $-\infty$ et 0, croissante entre 0 et 2, puis décroissante entre 2 et ∞. la fonction admet un minimum global en 0 ($f(0) = 0$) et un maximum global en 2 ($f(2) = 2$).

EXERCICE 11 Trivial. Calculer $f'(x)$. C'est un polynôme d'ordre 2. Calculer le discriminant, exclure le cas où celui-ci est négatif (f est alors monotone puisque f' ne change pas de signe). Calculer $f''(x)$, il s'agit d'un polynôme d'ordre 1 (une droite). Montrer que le point $x^\star$ tel que $f''(x^\star) = 0$ est entre les deux racines du polynôme d'ordre 2 (f').

EXERCICE 12 On utilise la règle de l'Hospital.

EXERCICE 13 **(a)** On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned}(x^\star, y^\star) = &\arg\max_{\{x,y\}} xy \\ &\underline{sc} \quad x + y = 100\end{aligned}$$

En substituant la contrainte dans l'objectif, on résoudre le problème par rapport à x (puis déduire y optimal avec la contrainte) :

$$x^\star = \arg\max_{\{x,y\}} x(100 - x)$$

$x^\star$ annuler la dérivée de l'objectif, et donc vérifier :

$$-2x^\star + 100 = 0$$

On a donc $x^\star$, et donc $y^\star$. **(b)** On procède de la même façon (on trouve aussi $x^\star = y^\star = 50$).