Calcul Économique

(Fiche de TD n°3)

Stéphane Adjemian*

Le 28 décembre 2024 à 9:13

Exercice 1 Soit la suite de terme général $u_n = u_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$, avec la condition initiale $u_1 = 1$. **(1)** Donner une expression de u_n en fonction du rang n. **(2)** Soit la suite $v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ pour $n \geq 1$. Quelle est la condition initiale de cette suite ? Déterminer v_n.

Exercice 2 Soit la suite de terme général $u_n = \rho u_{n-1}$ pour $n \geq 1$ avec la condition initiale $u_0 = 1$ et $0 < \rho < 1$. **(1)** Donner une expression de u_n en fonction du rang n et de sa condition initiale. **(2)** Montrer que u_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini en établissant que l'on peut rendre arbitrairemet petite la distance entre u_n et 0 à partir du moment où n est assez grand. **(3)** Dans le cas où la suite admet une limite, combien d'itérations faut-il pour réduire de moitié la distance à la limite ? **(4)** Montrer que la suite diverge si $\rho > 1$.

Exercice 3 Soit la suite de terme général $u_n = \frac{n+2}{n}$. Montrer que cette suite a pour limite 1.

Exercice 4 Quel est le comportement asymptotique de la suite de terme général $u_n = -n$.

Exercice 5 Soit la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. Montrer que cette suite admet 0 pour limite.

Exercice 6 Soit la suite $(u_n) \in \mathbb{Q}$ définie par :

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{1}{u_{n-1}}$$

avec $u_1 = 2$. **(1)** Donner les premiers termes de la suite. **(2)** Montrer que la suite est inférieurement bornée par $\sqrt{2}$. **(3)** Calculer le point fixe de la suite. **(4)** Montrer que la suite est monotone décroissante. **(5)** Conclure sur le comportement asymptotique, la limite de la suite est-elle dans $\mathbb{Q}$? **(6)** Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$ et en déduire que $u_n - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2^n}$.

Exercice 7 Identifier les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-3}$

*Université du Mans. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2+8}{x^2+6}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{kx^2+lx+m}$
4. $\lim_{x\to-4} \frac{x^2-16}{x+4}$
5. $\lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x}$ et $\lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x}$
6. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
7. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x} - x$
8. $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$

EXERCICE 8 Soit la fonction à valeurs réelles définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE 9 Soit la fonction à valeurs réelles définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+ax+b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner les conditions sur les paramètres a et b pour que la fonction soit continue sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE 10 Soit la fonction f sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log|x|} & \text{si } x \notin \{-1,0,1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En quels points la fonction f est-elle continue ?

EXERCICE 11 Soit la fonction défine sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}$$

Cette fonction est-elle continue en -1 ? Est-il possible de la prolonger par continuité en -1 ?

EXERCICE 12 En utilisant la définition de la dérivée, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 4x^2+3$
2. $g(x) = x^n, \forall \quad n \in \mathbb{N}$ et $\forall \quad x \in \mathbb{R}$
3. $h(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$
4. $j(x) = \sqrt{1+x}$

Pour $g(x)$ vous utiliserez la formule du binôme de Newton (une généralisation de l'identité remarquable bien connue) :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où $m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ la fonction factorielle.

EXERCICE 13 Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Calculer f′(0) si la dérivée en zéro existe.