Calcul Économique

Éléments de correction du TD 3

Stéphane Adjemian

stephane.adjemian@univ-lemans.fr

Septembre 2024

Exercice 1

- On a $u_1 = \rho$, $u_2 = \rho u_1 = \rho^2$, $u_3 = \rho u_2 = \rho^3$, ...
- En comparant l'indice de la suite et l'exposant sur ρ, on devine que $u_n = \rho^n$.
- On montre facilement qui cela est vrai alors on doit avoir $u_{n+1} = \rho^{n+1}$ (de sorte que le terme général postulé pour u_n est vrai pour tout n) :

  $$u_{n+1} = \rho u_n = \rho \rho^n = \rho^{n+1}$$

  On a donc bien $u_n = \rho^n$ pour tout entier naturel n.
- Pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

  $$|u_n - 0| = |\rho^n| < \varepsilon$$

  $$\Leftrightarrow \rho^n < \varepsilon, \text{ car} \rho \text{ est positif}$$

  $$\Leftrightarrow n \log \rho < \log \varepsilon, \text{ car le logarithme est une fonction croissante}$$

  $$\Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log \rho}, \text{ car} \log \rho \text{ est négatif}$$

  Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $|u_n - 0| < \varepsilon$ dès lors que $n > N(\varepsilon) = {}^{\log \varepsilon}/_{\log \rho}$. Il faut aller chercher des n d'autant plus grands que ε est petit ou ρ proche de 1 (le processus est plus persistant, voir la question suivante).

Exercice 1 (suite)

- Combien d'itérations faut-il pour réduire de moitié la distance à la limite ? Cela revient à se demander, partant de $u_0 = 1$, pour quelle valeur de n on a $u_n = {}^1\!/_1$, c'est-à-dire :

  $$\rho^n = \frac{1}{2}$$

  ou encore :

  $$n \log \rho = -\log 2$$

  et donc :

  $$n = -\frac{\log 2}{\log \rho} > 1$$

  Il faut plus d'itérations si ρ est plus proche de 1, dans ce cas on dit que le processus est plus persistant.

- Le nombre d'itération nécessaires est indépendant de la condition initiale.

$\rightarrow$ Pour que u_m soit égal à la moitié de u_n il faut et il suffit que $m - n$ soit égal à $-{}^{\log 2}\!/_{\log \rho}$.

Exercice 1 (suite)

- La suite diverge vers $+\infty$ si $\rho > 1$. Pour tout $\mathscr{A} > 0$ on peut montrer qu'il existe un rang N tel que pour tout $n > N$ on ait $u_n > \mathscr{A}$.

$$u_n > \mathscr{A} \Leftrightarrow \rho^n > \mathscr{A} \Leftrightarrow n \log \rho > \log \mathscr{A} \Leftrightarrow n > \frac{\log \mathscr{A}}{\log \rho} \equiv N$$

  Conformément à l'intuition, on note que le rang N est d'autant plus petit que ρ est grand (c'est-à-dire que u_n croît vite, puisque le taux de croissance de u_n est $100\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right) = 100(\rho - 1)$ en pourcentage).

Exercice 2

n	1	2	3	4	...
u_n	3	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{2}$	...

- Cette suite est monotone décroissance, en effet $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} = \frac{n(n+3) - (n+1)(n+2)}{n(n+1)} = -\frac{2}{n(n+1)} < 0$$

- On montre que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ en montrant que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n > N$ on ait $|u_n - 1| < \varepsilon$ (à partir d'un certain rang la suite se rapproche arbitrairement de 1).

- Nous avons $|u_n - 1| = \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| = \frac{2}{n}$, et donc :

$$|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} \equiv N$$

Exercice 3

- Cette suite diverge vers $-\infty$.
- Pour le montrer, il suffit d'établir que l'on peut rendre arbitrairement petit u_n (vers $-\infty$) dès lors que l'indice n est assez grand.
- Il faut montrer que $\forall \mathscr{A} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < -\mathscr{A}$ pour tout $n > N$.

$$u_n < -\mathscr{A} \Leftrightarrow -n < -\mathscr{A} \Leftrightarrow n > \mathscr{A} \equiv N$$

Exercice 4

- Il s'agit d'une suite alternée (non monotone) à cause de la puissance sur -1.
- On a $|u_n - 0| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$.
- Soit $\varepsilon > 0$ une constante arbitrairement petite.
- On a :
$$|u_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \equiv N$$
- Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, si n est plus grand que le rang $N(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ alors $|u_n - 0| < \varepsilon$.
- On peut rendre u_n arbitrairement proche de 0 à partir du moment où n est assez grand.

Exercice 5

n	1	2	3	4	...
u_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	...
u_n	2	1,5	1,4166667	1,4142157	...

- On peut écrire $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ de façon équivalente sous la forme :

$$\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \geq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} \geq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n^2 - 2u_n\sqrt{2} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \geq 0$$

Le carré d'un nombre réel ne peut être négatif, cette inégalité est donc nécessairement vérifiée et u_{n+1} est donc forcément supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

Exercice 5 (suite)

- Un point fixe de la suite est une valeur réelle $\bar{u}$ telle que :

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}}{2} + \frac{1}{\bar{u}}$$

- En toute généralité une suite peut admettre plus d'un point fixe.
- Ici il existe un unique point fixe. On a :

$$\bar{u}^2 = \frac{\bar{u}^2}{2} + 1$$

$$\frac{\bar{u}^2}{2} = 1$$

$$\bar{u}^2 = 2$$

- Comme la suite est positive (puisque $u_n \geq \sqrt{2}$), il existe une unique solution pour $\bar{u}$:

$$\bar{u} = \sqrt{2}$$

Exercice 5 (suite)

- Pour montrer que la suite est décroissante, il faut montrer que les variations sont négatives pour tout n.
- On a des équivalences suivantes :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$$

  La dernière inégalité est vraie puisque $u_n \geq \sqrt{2}$, on a donc bien $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n (l'inégalité est stricte tant que $u_n > \sqrt{2}$).
- La suite est donc monotone décroissante.

Exercice 5 (suite)

- La suite u_n est décroissante et bornée.
- La suite u_n est donc convergente.
- On a $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$.
- La suite u_n est à valeurs dans $\mathbb{Q}$, mais sa limite n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel).

Exercice 5 (suite)

- Pour montrer l'inégalité demandée en **(6)**, on a les équivalences suivantes :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2}\right) < u_n - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n + \frac{2}{u_n} - 2\sqrt{2} < u_n - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{u_n} < \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n > \sqrt{2}$$

  Cette dernière inégalité est vraie, puisque $\sqrt{2}$ est un minorant de la suite, donc la première inégalité est vraie.

- En itérant sur l'inégalité, on obtient :

$$u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_{n-1} - \sqrt{2}\right) < \frac{1}{2^2}\left(u_{n-2} - \sqrt{2}\right) < \dots\dots < \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right)$$

Exercice 5 (suite)

- On a donc bien :

$$0 < u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2^n}$$

- On voit donc qu'il est possible de rendre $|u_n - \sqrt{2}|$ arbitrairement petit à partir du moment où n est assez grand.

Exercice 6 (1)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(2+\frac{5}{x})}{x(x-\frac{3}{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x}}{x-\frac{3}{x}} \\
&= \frac{2+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}}{\lim_{x\to\infty} x - \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}} \\
&= \frac{2}{\lim_{x\to\infty} x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Exercice 6 (2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2+8}{x^2+6} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-4+\frac{8}{x^2})}{x^2(1+\frac{6}{x^2})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x-4+\frac{8}{x^2}}{1+\frac{6}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} x-4+\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} x-4}{1} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Exercice 6 (3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{kx^2+lx+m} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2})}{x^2(k+\frac{l}{x}+\frac{m}{x^2})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{k+\frac{l}{x}+\frac{m}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{a+\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^2}}{k+\lim_{x\to\infty}\frac{l}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{m}{x^2}} \\
&= \frac{a}{k}
\end{aligned}$$

Il faut bien sûr supposer que $k \neq 0$, sinon la fonction diverge vers $+\infty$.

Exercice 6 (4)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-4} \frac{x^2-16}{x+4} &= \lim_{x\to-4} \frac{(x-4)(x+4)}{x+4} \\
&= \lim_{x\to-4}(x-4) \\
&= \lim_{x\to-4} x-4 \\
&= -8
\end{aligned}$$

Exercice 6 (5)

$x \to 0^+ \Rightarrow x > 0$ et donc $|x| = x$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$x \to 0^- \Rightarrow x < 0$ et donc $|x| = -x$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x}{x} = -1$$

Exercice 6 (6)

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} &= \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\ &= \frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

Puisqu'au édnominateur nous avons la somme de deux racines carrées qui tendent vers l'infini lorsque x tend vers l'infini, on conclut que $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=0$.

Exercice 6 (7)

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+4x}-x &= \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\sqrt{x^2+4x}+x} \\
&= \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \frac{4x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}
\end{aligned}$$

En effet nous ne nous intéressons qu'aux valeurs positives de x, puisque nous considérons la limite quand x tend vers $+\infty$.

$$\sqrt{x^2+4x}-x = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

et donc :

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+4x}-x=2$$

Exercice 6 (8)

Remarque : Pour $x = -2$ le numérateur et le dénominateur sont nuls !

$\Rightarrow$ On peut factoriser $x + 2$ au dénominateur et au numérateur.

On a $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ (identité remarquable).

Par la méthode des coefficients indéterminés ou division euclidienne (voir le chapitre II) on montre que :

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2)\left(x^2 - 1\right)$$

On a donc :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\frac{3}{4}$$

Exercice 7

Pour que cette fonction soit définie sur $\mathbb{R}$ il faut et il suffit qu'elle soit continue en -1 et 2, puisque les morceaux sont des droites (c'est-à-dire des fonctions continues).

Pour que la fonction soit continue en 2, il faut que $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$. On a $f(2) = 2 - 1 = 1$, et :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -3 \times 2 + 7 = 1 \text{ on considère la deuxième branche avec} x < 2$$

puis

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 - 1 = 1 \text{ on considère la troisième branche avec} x \geq 2$$

Donc la fonction est continue en $x = 2$.

Mais elle n'est pas continue en $x = -1$. En effet, nous avons $f(-1) = 2$ et :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -3 \times (-1) + 7 = 10$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 6 \times (-1) + 8 = 2$$

Cette fonction n'admet pas de limite en -1 puisque les limites à droites et à gauche sont différentes. La fonction n'est donc pas continue en -1.

Exercice 8

Pour que cette fonction soit définie sur $\mathbb{R}$ il faut et il suffit qu'elle soit continue en 2, puisque les morceaux sont des fonctions polynomiales d'ordre 2 (c'est-à-dire continues).

Pour que la fonction soit continue en 2, il faut que $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$. On a $f(2) = 4a + 2b + 1$. Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4a + 2b + 1$$

puis

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 + 2a + b$$

Pour que la fonction soit continue en $x = 2$ et donc sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que :

$$4a + 2b + 1 = 4 + 2a + b$$

ou de façon équivalente :

$$b = 3 - 2a$$

Exercice 9

- La fonction est continue en tout point différent de -1, 0 ou 1, car il s'agit d'une composition de fonctions continues (la valeur absolue, le logarithme et l'inverse).

- En zéro la fonction est continue car :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{u \to -\infty} \frac{1}{u} = 0 = f(0)$$

  puisque $\lim_{x \to 0} \log |x| = -\infty$.

- En $x = 1$ la fonction n'est pas continue. En effet, on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^+} \log |x| & = 0^+ \\ \lim_{x \to 1^-} \log |x| & = 0^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} f(x) & = \infty \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) & = -\infty \end{cases}$$

  La fonction n'admet pas de limite en $x = 1$ la fonction n'est donc pas continue. De plus, les limites à droite et à gauche sont différentes de $f(1)$.

- Même argument pour $x = -1$.

Exercice 10

- On a une forme indéterminée 0/0 en -1.
- Calculons, si elle existe, la limite de f quand x tend vers -1.
- Puisque -1 est une racine du polynôme au dénominateur, on montre facilement que celui-ci peut s'écrire sous la forme $(x+1)\left(x^2-x+1\right)$ (par la méthode des coefficients indéterminés par exemple).
- On a donc :

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}$$

- Nous pouvons donc prolonger f :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 11 (1)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^2+3-4x^2+3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4(x^2+2xh+h^2)-4x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{8xh+h^2}{h} \\
&= 8x + \lim_{h\to 0} h \\
&= 8x
\end{aligned}$$

Exercice 11 (2)

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} h^k}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} h^{k-1} \\
&= C_n^1 x^{n-1} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Exercice 11 (3)

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Exercice 11 (4)

$$
\begin{aligned}
j'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \frac{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+1-x-1}{h} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}
$$

Exercice 12

En notant que $f(0) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{1+|x|} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + |x|} \\ &= 1 \end{aligned}$$