Calcul Économique

Éléments de correction du TD 2

Stéphane Adjemian

stephane.adjemian@univ-lemans.fr

Septembre 2024

Exercice 1

- Postulons la fonction de demande linéaire :

$$D(p) = a + b \times p$$

où p est le prix d'une montre et $D(p)$ la quantité de montres demandées pour ce prix, a et b sont des paramètres réels que nous devons déterminer.

- On sait que les paramètres a et b doivent satisfaire :

$$\begin{cases} 10 & = a + b \times 160 \\ 20 & = a + b \times 120 \end{cases}$$

la droite, pour l'instant inconnue, doit passer par les points $(160, 10)$ et $(120, 20)$.

- Nous avons deux inconnues (a et b) et deux équations (deux contraintes sur a et b). Pour résoudre ce système nous pouvons, par exemple, considérer la différence entre la seconde et la première équation (ce qui permet d'éliminer le paramètre a et d'obtenir une équation avec une seule inconnue) :

$$20 - 10 = b \times (120 - 160)$$

nous déduisons directement que $b = -{}^1\!/_4$, puis en substituant dans la première équation $a = 10 + 160/4 = 50$.

- La fonction de demande est donc $D(p) = 50 - p/4$.

Exercice 2

- Postulons la fonction d'offre linéaire :

$$S(p) = a + b \times p$$

où p est le prix d'une montre et $S(p)$ la quantité offerte pour ce prix, a et b sont des paramètres réels que nous devons déterminer.

- On sait que les paramètres a et b doivent satisfaire :

$$\begin{cases} 50 & = a + b \times 100 \\ 100 & = a + b \times 150 \end{cases}$$

la droite, pour l'instant inconnue, doit passer par les points $(100, 50)$ et $(150, 100)$.

- Pour résoudre ce système, c'est-à-dire déterminer a et b, nous pouvons, par exemple, substituer la première équation (qui nous dit que $a = 50 - b \times 100$) dans la seconde (ce qui permet d'éliminer le paramètre a et d'obtenir une équation avec une seule inconnue) :

$$100 = \underbrace{50 - b \times 100}_{a} + b \times 150 \Leftrightarrow 100 = 50 + b \times 50 \Leftrightarrow b = 1$$

puis on obtient la valeur de a en substituant dans la première équation : $a = 50 - 1 \times 100 = -50$.

- La fonction d'offre est donc $S(p) = -50 + p$.

Exercice 3

- Le prix d'équilibre $p^\star > 0$, est tel que l'offre et de la demande soient égales, c'est-à-dire :

$$-2p^\star + 6 = \frac{1}{2}p^\star + 1$$
$$\Leftrightarrow 5 = \frac{5}{2}p^\star$$
$$\Leftrightarrow p^\star = 2$$

- On déduit les quantités échangées à l'équilibre en substituant $p^\star$ dans la fonction de demande :

$$q^\star = D(p^\star)$$
$$\Leftrightarrow q^\star = -2 \times 2 + 6$$
$$\Leftrightarrow q^\star = 2$$

Remarque Nous aurions obtenu le même résultat sur les quantités échangées à l'équilibre en substituant $p^\star$ dans la fonction d'offre puisque, par définition, en $p^\star$ l'offre et la demande sont identiques.

Exercice 4

- La consommation est donnée par $C = C_0 + aY$, où le paramètre réel a est inconnu.
- De façon équivalente on a $C - C_0 = aY$.
- Soit Z une variable (quelconque), on note ΔZ la variation de cette variable.
- On doit avoir $\Delta(C - C_0) = a\Delta Y$.
- On sait que si $\Delta Y = x$ alors on doit avoir $\Delta(C - C_0) = 0,8Y$.
- Par identification, on a directement $a = 0,8$ et donc :

$$C = C_0 + 0,8Y$$

Exercice 5

- On reconnaît une identité remarquable :

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

- Puisque le carré d'une variable réelle est forcément positif ou nul, on sait que :

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Le carré d'un nombre est nul si et seulement si ce nombre est nul. On sait donc que $f(x)$ est nul si et seulement si $x + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = -1$.

- Comme $f(x)$ ne peut atteindre des valeurs négatives, la fonction f admet donc un unique minimum en $x = -1$.

Exercice 6

- Le prix d'équilibre $p^\star > 0$ est tel que $S(p^\star) = D(p^\star)$, c'est-à-dire tel que :

$$-2\ {p^\star}^2 + 3 = \ {p^\star}^2 + 5p^\star + 2$$

$$\Leftrightarrow 3\ {p^\star}^2 + 5p^\star - 1 = 0$$

- Le prix d'équilibre, s'il existe, doit être une solution positive de la dernière équation.

- Le discriminant associé au polynôme d'ordre 2 est $\Delta = 5^2 + 4 \times 3 = 37$

- Les solutions de l'équation polynomiale d'ordre deux sont :

$$p_1 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6}$$

- La seule solution positive est p_1 (car $\sqrt{37} > \sqrt{25} = 5$), le prix d'équilibre (unique puisque $p_2 < 0$) est :

$$p^\star = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6} \approx 0,18046$$

Exercice 7

- On postule un polynôme d'ordre deux $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec des coefficients réels inconnus.

- Si nous pouvons déterminer de façon unique les coefficients a, b et c, alors nous aurons montré l'existence et l'unicité d'un polynôme passant par les points $(0, 2)$, $(-2, 16)$ et $(1, 4)$.

- En évaluant le polynôme en ces points, nous savons que le polynôme doit satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c & = 2 \\ a(-2)^2 + b(-2) + c & = 16 \\ a(1)^2 + b(1) + c & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = 2 \\ 4a - 2b & = 14 \\ a + b & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = 2 \\ b & = 2 - a \\ 4a - 2(2 - a) & = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c & = 2 \\ b & = -1 \\ a & = 3 \end{cases}$$

- Il existe donc un unique polynôme d'ordre deux passant par $(0, 2)$, $(-2, 16)$ et $(1, 4)$:

$$P(x) = 3x^2 - x + 2$$

Remarque En postulant un polynôme d'ordre 1 nous ne trouverions pas de solution, aucune droite ne peut relier ces trois points. Nous perdrions l'unicité de la solution si nous envisagions un polynôme d'ordre supérieur.

Exercice 8

- On utilise les deux identités remarquables utilisées en cours pour établir les formules usuelles.
- On a :
$$P(x) = x^2 - 2x + 1 - 4$$
- En exploitant $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on obtient :
$$P(x) = (x-1)^2 - 4$$
- En exploitant $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, on obtient :
$$P(x) = (x-1-2)(x-1+2)$$
- Finalement :
$$P(x) = (x-3)(x+1)$$
- Les racines sont donc 3 et -1.

Exercice 9

- On peut réécrire le polynôme sous la forme :

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 + 1$$

- Ou encore, en reconnaissant l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$P(x) = (x - 1)^2 + 1$$

- Puisque le carré d'une variable réelle est nécessairement non négatif, on a :

$$(x - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  et donc :

$$P(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Il n'existe donc pas de valeur de x dans $\mathbb{R}$ telle que $P(x) = 0$. Les deux racines du polynôme sont complexes.

Exercice 10

- Notons x_1, x_2 et x_3 les racines du polynôme P. On pose $x_3 = x_1 + x_2$.
- Le polynôme peut se factoriser sous la forme : $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
- En développant la forme factorisée, on obtient des restrictions sur les racines. En effet :
$$P(x) = (x - x_1)\left(x^2 - x(x_2 + x_3) + x_2x_3\right)$$
$$P(x) = x^3 - x^2\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{8} + x\underbrace{(x_2x_3 + x_1(x_2 + x_3))}_{23} - \underbrace{x_1x_2x_3}_{28}$$
- On doit avoir $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ et $x_3 = x_1 + x_2$, c'est-à-dire $2x_3 = 8$ et donc $x_3 = 4$.
- On peut donc réécrire le polynôme P sous la forme $P(x) = (x - 4)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme d'ordre deux.

Exercice 10(suite)

- On peut trouver le polynôme $Q(x)$ à l'aide d'une division euclidienne :

$$
\begin{array}{rr|l}
x^3 - 8x^2 + 23x - 28 & & x - 4 \\
\cline{3-3}
-x^3 + 4x^2 & & x^2 - 4x + 7 \\
\cline{1-1}
-4x^2 + 23x & & \\
4x^2 - 16x & & \\
\cline{1-1}
7x - 28 & & \\
-7x + 28 & & \\
\cline{1-1}
0 & &
\end{array}
$$

- Il ne nous reste plus qu'à calculer les deux racines du polynôme $Q(x) = x^2 - 4x + 7$.

- Le discriminant est $\Delta = 16 - 4 \times 7 = -12$. Ce polynôme n'admet donc pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{-3}}{2} = 2 - \sqrt{-1 \times 3} = 2 - \sqrt{-1}\sqrt{3} = 2 - i\sqrt{3}$$

et

$$x_2 = 2 + i\sqrt{3}$$

Exercice 11

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

- Zéro est une racine évidente du polynôme, $P(0) = 0$, que nous pouvons donc réécrire sous la forme :
$$P(x) = x(x - 2x + 2)$$
- Pour trouver les deux autres racines, nous devons trouver les racines de $Q(x) = x - 2x + 2$.
- Le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$, les deux racines de Q sont donc complexes conjugées :
$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{(2i)^2}}{2} = 1 - i$$
et
$$x_2 = 1 + i$$
- Les solutions de $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$ sont donc 0, $1 - i$ et $1 + i$.

Exercice 11(suite)

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

- Un est une racine évidente du polynôme, $P(1) = 0$, que nous pouvons donc réécrire sous la forme :
$$P(x) = (x-1)Q(x)$$
où Q est un polynôme d'ordre 2.

- Pour trouver les deux autres racines, nous devons d'abord identifier le polynôme Q.

- Nous utilisons la méthode des coefficients indéterminés (nous pourrions alternativement faire une division euclidienne).

- On postule :
$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$
où les paramètres réels a, b et c sont inconnus. Le but est d'identifier ces paramètres.

- On a :
$$\begin{aligned}(x-1)Q(x) &= (x-1)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c\\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c\end{aligned}$$

Exercice 11(suite)

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

- En comparant le développement de $(1-x)Q(x)$ avec la définition de $P(x)$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b - a & = 2 \\ c - b & = -1 \\ c & = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 3 \\ c & = 2 \end{cases}$$

- Nous avons donc $Q(x) = x^2 + 3x + 2$.
- Le discriminant de Q est $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$, les deux racines de Q sont $x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $\frac{-3+1}{2} = -1$.
- Les solutions de $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ sont -2, -1 et 1.

Exercice 11(suite)

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

- En comparant le développement de $(1-x)Q(x)$ avec la définition de $P(x)$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b - a & = 2 \\ c - b & = -1 \\ c & = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 3 \\ c & = 2 \end{cases}$$

- Nous avons donc $Q(x) = x^2 + 3x + 2$.
- Le discriminant de Q est $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$, les deux racines de Q sont $x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $\frac{-3+1}{2} = -1$.
- Les solutions de $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ sont -2, -1 et 1.

Exercice 11(suite)

$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

- 1 et -1 sont des racines évidentes...
- On remarque aussi que toutes les puissances sont paires. On peut donc ici ce ramener à un polynôme d'ordre 2 en posant $z = x^2$:

  $$Q(z) = z^2 - 5z + 4$$

  Si $z^\star$ est une racine de Q alors $\pm\sqrt{z^\star}$ sont des racines de P.
- Le discriminant associé à Q est $\Delta = 25 - 16 = 9$.
- Les racines de Q sont $z_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{5+3}{2} = 4$.
- Les solutions de $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ sont donc -2, -1, 1 et 2.

Exercice 11(suite)

$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

- 1 et -1 sont des racines évidentes...
- On remarque aussi que toutes les puissances sont paires. On peut donc ici ce ramener à un polynôme d'ordre 2 en posant $z = x^2$:

$$Q(z) = z^2 - 5z + 4$$

  Si $z^\star$ est une racine de Q alors $\pm\sqrt{z^\star}$ sont des racines de P.

- Le discriminant associé à Q est $\Delta = 25 - 16 = 9$.
- Les racines de Q sont $z_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{5+3}{2} = 4$.
- Les solutions de $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ sont donc -2, -1, 1 et 2.

Exercice 11(suite)

$P(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

- On reconnaît une identité remarquable, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, qui nous permet de factoriser directement le polynôme P :

$$P(x) = (x - \sqrt{2})^2$$

- $\sqrt{2}$ est donc la racine de multiplicité deux du polynôme P.
- $\sqrt{2}$ est l'unique solution de l'équation $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

Exercice 11(suite)

$x^3 - 4x + \frac{3}{x} = 0$

L'équation n'est pas polynomiale, à cause du dernier terme, mais on peut obtenir les solutions de cette équation en cherchant les racines d'un polynôme.

- Notons que cette équation n'est pas définie en 0, à cause du dernier terme, on cherche donc des solutions sur $\mathbb{R}^\star$.
- Si on multiplie les deux membres de l'équation par x cela n'affecte pas les racines. Les solutions de l'équation sont donc aussi des solutions de :

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

il s'agit d'une équation polynomiale. Les racines non nulles du polynôme d'ordre quatre sont aussi des solution du problème de départ.

- On peut se ramener à une équation polynomiale d'ordre deux en posant $z = x^2$ (car nous n'avons ici que des puissances paires) :

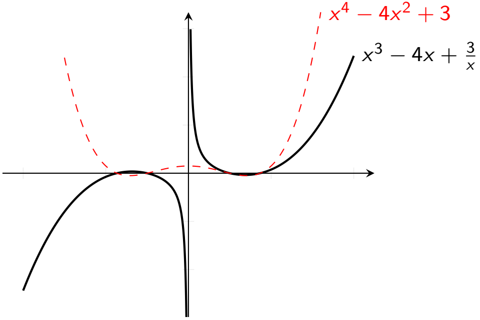
$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

Si $z^\star$ est une solution de l'équation polynomiale d'ordre deux alors $\pm\sqrt{z^\star}$ sont des solutions de l'équation polynomiale d'ordre quatre (et donc du problème de départ).

Exercice 11(suite)

$x^3 - 4x + \frac{3}{x} = 0$

- 1 et 3 sont des solutions évidentes de l'équation polynomiale d'ordre deux.
- Les solutions de l'équation polynomiale d'ordre quatre, et donc du problème d'origine, sont $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$.
- Ici, nous avons calculé les solutions d'une équation non linéaire en nous ramenant à une équation polynomiale que nous savons résoudre. Ce n'est pas souvent possible...



Exercice 12

- On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 50$$

- En développant, $n \in \mathbb{N}$ doit satisfaire :

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 50$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 6n - 45 = 0$$

- Le discriminant associé au polynôme $P(n) = 3n^2 + 6n - 35$ est $\Delta = 36 + 4 \times 3 \times 45 = 476$.

- Les racines de P sont donc $n_1 = \frac{-6-24}{6} = -5$ et $n_2 = \frac{-6+24}{6} = 3$.

- Comme nous cherchons $n \in \mathbb{N}$, la seule racine pertinente est $n_2 = 3$.

- Les trois entiers naturels consécutifs sont donc 3, 4 et 5, ils vérifient $3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$.

Exercice 13

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = e^{-x} - e^{x} = -\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -f(x)$$

la fonction f est donc impaire.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} \\ &= \frac{e^{-2x}\left(1 - e^{2x}\right)}{e^{-2x}\left(1 + e^{-2x}\right)} \\ &= -\frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = -g(x) \end{aligned}$$

la fonction g est donc impaire.

Exercice 13(suite)

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}\left(1+e^{x}\right)\right)^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-2x}\left(1+e^{x}\right)^2} \\ &= \frac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^2} = h(x) \end{aligned}$$

la fonction h est donc paire.

Exercice 14

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$

- Posons $u = e^x$, on peut alors réécrire l'équation en terme de u :

$$u^2 - u - 6 = 0$$

- On cherche une solution positive de cette équation polynomiale, car l'exponentielle doit être positive.

- Le discriminant associé au polynôme d'ordre deux est $\Delta = 25$. Les solutions de l'équation polynomiale sont donc :

$$u_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

- La solution pertinente, par rapport au problème initial, est $u_2 = 3$, car il s'agit de la seule solution positive.

- La solution du problème original est x tel que $3 = e^x$, c'est-à-dire (en appliquant la fonction réciproque de l'exponentielle) $x = \log 3$.

Exercice 14

$3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$

- Comme dans le cas précédent, posons $u = e^x$, on peut alors réécrire l'équation en terme de u :
$$3u - \frac{7}{u} - 20 = 0$$
- Les solutions de cette équation sont aussi les solutions de (en multipliant l'équation par u) :
$$3u^2 - 20u - 7 = 0$$
- En suivant la démarche habituelle on montre facilement que les solutions sont :
$$u_1 = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad u_2 = 7$$
- La solution pertinente, par rapport au problème initial, est $u_2 = 7$, car il s'agit de la seule solution positive.
- La solution du problème original est donc $x = \log 7$.

Exercice 15

Premier système

- En appliquant le logarithme népérien aux deux équations, on peut réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} x + y & = \log 10 \\ x - y & = \log 5 - \log 2 \end{cases}$$

- En notant que $10 = 5 \times 2$, on peut réécrire la première équation :

$$\begin{cases} x + y & = \log 5 + \log 2 \\ x - y & = \log 5 - \log 2 \end{cases}$$

- La solution est donc :

$$\begin{cases} x & = \log 5 \\ y & = \log 2 \end{cases}$$

Exercice 15(suite)

Deuxième système

- On pose $u = e^x$ et $v = e^y$ et cherche à résoudre le système suivant par rapport à u et v :

$$\begin{cases} u - 2v & = -5 \\ 3u + v & = 13 \end{cases}$$

- On trouve :

$$\begin{cases} u & = 3 \\ v & = 4 \end{cases}$$

- La solution est donc :

$$\begin{cases} x & = \log 3 \\ y & = \log 4 \end{cases}$$

Exercice 15(suite)

Troisième système

- En utilisant le même changement de variable, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 5u - v & = 19 \\ uv & = 30 \end{cases}$$

- En substituant la seconde équation dans la première on élimine v de la première équation et trouve que u doit être solution de :

$$5u - \frac{30}{u} = 19$$

ou, de façon équivalente, solution de :

$$5u^2 - 19u - 30 = 0$$

- Le polynôme d'ordre deux en u possède deux racines réelles distinctes dont une seule positive $u_2 = 5$ (on ne peut considérer la racine négative car u, comme v, doit être positif).

- L'unique solution pertinente du système transformé est donc $u = 5$ et $v = 30/5 = 6$.

- La solution du problème original est donc $x = \log 5$ et $y = \log 6$.

Exercice 16

$\log(x^2-1) - \log(2x-1) + \log 2 = 0$

- Il convient d'abord de s'interroger sur l'ensembl edes valeurs possibles de x.
- Il faut que x soit tel que $x^2-1>0$ et $2x-1>0$ (car le logarithme d'un nombre négatif n'est pas défini dans $\mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x^2-1 & >0 \\ 2x-1 & >0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 & >1 \\ x & >\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & >1 \vee x<-1 \\ x & >\frac{1}{2} \end{cases}$$

  Il faut donc que x soit strictement supérieur à 1 pour que l'équation ait un sens.

- En exploitant les propriétés du logarithme, on peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\log \frac{x^2-1}{2x-1} = \log \frac{1}{2}$$

Exercice 16(suite)

$\log(x^2 - 1) - \log(2x - 1) + \log 2 = 0$

- Puis en appliquant la fonction exponentielle :

$$\frac{x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

- Le discriminant du polynôme d'ordre deux est $\Delta = 12$.
- Les racines du polynôme sont :

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4}$$

- x_2 est la seule racine pertinente car $x_1 < 1$.
- La solution de $\log(x^2 - 1) - \log(2x - 1) + \log 2 = 0$ est $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 16(suite)

$\log(x+2) - \log(x+1) = \log(x-1)$

- Pour que l'équation ait un sens il faut que $x > 1$.
- En exploitant les propriétés du logarithme et en appliquant la fonction exponentielle, on peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\frac{x+2}{x+1} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

- Les solutions de cette équation polynomiale sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.
- x_2 est la seule solution pertinente, car $x_1 < 1$.