Calcul Économique

(Fiche de TD n°1)

Stéphane Adjemian *

Le 28 décembre 2024 à 9:13

Exercice 1 Soit une proposition P. Montrer, à l'aide d'un tableau de vérité, que $P \wedge P \Leftrightarrow P$ et $P \vee P \Leftrightarrow P$.

Exercice 2 Soient P, Q et R trois propositions. Montrer, à l'aide d'un tableau de vérité, que :

(i) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(ii) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

(iii) $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

(iv) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

(v) $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

(vi) $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

Exercice 3 Montrer la transitivité de l'implication logique, c'est-à-dire que :

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

avec P, Q et R trois propositions.

Exercice 4 Exprimer l'équivalence logique en termes d'implication logique, en établissant que :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

avec P et Q deux propositions.

Exercice 5 Montrer que l'implication logique suivante :

$$(10^n + 1 \text{ est divisible par } 9) \Rightarrow (10^{n+1} + 1 \text{ est divisible par } 9)$$

est vraie, avec $n \in \mathbb{N}$. Que pensez vous de ces propositions ?

Exercice 6 Montrer les propositions suivantes :

(i) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

*Université du Mans. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

(iii) $\sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, avec x un réel différent de 1.

EXERCICE 7 Soient les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 6\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 8\}$$

Déterminer les ensembles $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cup C$, $C \cap D$.

EXERCICE 8 Soient A et B deux sous ensembles de Ω. Illustrer avec des diagrammes de Venn les deux règles de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

EXERCICE 9 Soient les ensembles $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{4, 5\}$. Déterminer les ensembles suivants :

(i) $A \times (B \cup C)$

(ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cap C)$

(iv) $(A \times B) \cap (A \times C)$

EXERCICE 10 Soit E un ensemble tel que $\mathrm{Card}(E) = 30$. Si A et B sont deux sous ensembles de E non disjoints (*ie* $A \cap B \neq \emptyset$) tels que $\mathrm{Card}(A) = 20$, $\mathrm{Card}(B) = 15$ et $\mathrm{Card}(A \cap B) = 6$. Déterminer $\mathrm{Card}(A \cup B)$.

EXERCICE 11 Les résultats d'une entreprise ont montré que sur 50 employés, 30 sont obèses, 25 souffrent d'hypertension artérielle tandis que 20 ont un taux de cholestérol trop élevé. Parmi les 25 qui souffrent d'hypertension, 12 ont un taux de cholestérol trop élevé ; 15 obèses souffrent d'hypertension et 10 obèses souffrent d'un taux de cholestérol trop élevé ; finalement, 5 employés souffrent de ces trois maux à la fois. Déterminer le nombre d'employés bien portant à l'aide d'un diagramme de Venn.

EXERCICE 12 Sur 100 étudiants, on considère les ensembles S de ceux qui étudient la sociologie, E de ceux qui étudient l'économie et G de ceux qui étudient la gestion. Sur ces 100 étudiants, 55 étudient la sociologie, 9 la sociologie et la gestion, 7 la sociologie et l'économie, 8 l'économie et la gestion, 6 la sociologie et la gestion mais pas l'économie, 80 la sociologie ou la gestion et 12 l'économie seulement.

(i) Combien d'étudiants suivent les trois matières ?

(ii) Combien sont-ils a étudier la gestion ?

(iii) Combien sont-ils a étudier l'économie ?

(iv) Combien n'étudient aucune de ces trois matières ?

EXERCICE 13 Soient les ensembles :

$$\mathcal{E}_1 = \{(1;2),(2;8),(2;3)\}$$

$$\mathcal{E}_2 = \{(x;y)|x \in \mathbb{R} \wedge x \leq y\}$$

$$\mathcal{E}_3 = \{(x;y)|x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$$

$$\mathcal{E}_4 = \{(x;y)|y = x^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 2, \quad y = 3 - x \text{ si } 2 < x < 3, \quad y = 3 \text{ si } x = 3\}$$

Déterminez quels ensembles représentent une fonction.

EXERCICE 14 Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto f(x) = x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Calculer :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpréter cette expression.

EXERCICE 15 La fonction suivante est-elle injective ?

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto f(x) = x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

EXERCICE 16 Soient les fonctions $f(x) = x + 2$ et $g(x) = 2x + 5$.

(i) Calculer $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ et $m(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

(ii) Calculer $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$.

(iii) Calculer $h^{-1}(x)$ et $m^{-1}(x)$.

(iv) Calculer $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(x)$ et $\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x)$

Comparer les résultats des deux dernières questions.

EXERCICE 17 Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas nulle.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$.
4. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.