Calcul Économique

Éléments de correction du TD 1

Stéphane Adjemian

stephane.adjemian@univ-lemans.fr

Septembre 2024

Exercice 1

- Montrons que $P \vee P \Leftrightarrow P$, c'est-à-dire que la disjonction est idempotente :

P	$P \vee P$	$P \vee P \Leftrightarrow P$
V	V	V
F	F	V

Si P est vraie, alors $P \vee P$ est vraie quand P est vraie et fausse quand P est fausse. Ainsi la disjonction de P avec lui même a toujours la même valeur de vérité que P et les deux propositions sont donc équivalentes.

- Montrons que $P \wedge P \Leftrightarrow P$, c'est-à-dire que la conjonction est idempotente :

P	$P \wedge P$	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
V	V	V
F	F	V

Table 1 – Idempotence de la conjonction

Si P est vraie, alors $P \wedge P$ est vraie quand P est vraie et fausse quand P est fausse. Ainsi la conjonction de P avec lui même a toujours la même valeur de vérité que P et les deux propositions sont donc équivalentes.

Exercice 2

- Montrons que la conjonction est commutative (on se souvient qu'une conjonction est vraie si et seulement si les deux propositions sont vraies) :

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

On observe que les troisième et quatrième colonnes ont toujours la même valeur sur chaque ligne, les deux propositions associées $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont donc équivalentes. C.Q.F.D.

- Montrons que la disjonction est commutative (on se souvient qu'une disjonction est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions est vraie) :

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

On observe que les troisième et quatrième colonnes ont toujours la même valeur sur chaque ligne, les deux propositions associées $P \vee Q$ et $Q \vee P$ sont donc équivalentes. C.Q.F.D.

Exercice 2 (suite)

- Montrons que la conjonction est associative, c'est-à-dire que $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

On note que la cinquième et la septième colonnes sont identiques, d'où l'équivalence des propositions $(P \wedge Q) \wedge R$ et $P \wedge (Q \wedge R)$. C.Q.F.D.

Exercice 2 (suite)

- Montrons que la disjonction est associative, c'est-à-dire que $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$:

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

On note que la cinquième et la septième colonnes sont identiques, d'où l'équivalence des propositions $(P \vee Q) \vee R$ et $P \vee (Q \vee R)$. C.Q.F.D.

Exercice 2 (suite)

- Montrons que la disjonction est distributive par rapport à la conjonction, c'est-à-dire que $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

On note que la cinquième et huitième colonnes sont identiques, les propositions $(P \wedge Q) \vee R$ et $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ sont donc équivalentes. C.Q.F.D.

Exercice 2 (suite)

- Montrons que la conjonction est distributive par rapport à la disjonction, c'est-à-dire que $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$:

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

On note que la cinquième et huitième colonnes sont identiques, les propositions $(P \wedge Q) \vee R$ et $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ sont donc équivalentes. C.Q.F.D.

Exercice 3

Montrons que l'implication logique est transitive, c'es-à-dire que :

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Les colonnes 6 et 7 sont différentes, $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ et $P \Rightarrow R$ ne sont donc pas des propositions équivalentes.

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ est une condition suffisante pour $P \Rightarrow R$, mais il ne s'agit pas d'une condition nécessaire.

On obtient la dernière colonne en utilisant la définiton de l'implication logique.

Exercice 4

Montrons que l'on peut exprimer l'équivalence sous la forme de la conjonction de deux implcations, c'est-à-dire que pour deux propositions P et Q on a :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Puisque les colonnes 3 et 6 ont les mêmes valeurs de vérité sur chaque ligne les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont équivalentes. C.Q.F.D.

Exercice 5

- Notons P_n la proposition « 10^n est divisible par 9 » (avec $n \in \mathbb{N}$).

- Montrons que la proposition $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie.

- Si P_n alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n + 1 = 9k$.

- Notons qu'il est possible d'écrire P_{n+1} en fonction de P_n. En effet, on a :

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10\left(10^n + 1\right) - 10 + 1 \\ &= 10\left(10^n + 1\right) - 9 \end{aligned}$$

- Si P_n alors on sait que l'on peut trouver un entier k tel que l'on puisse remplacer $10^n + 1$ par $9k$, et donc :

$$10^{n+1} + 1 = 9(10k - 1)$$

- $10^{n+1} + 1$ est donc nécessairement divisible par 9.

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est une proposition vraie, pourtant P_n et P_{n+1} sont des propositions fausses (essayer avec $n = 0$).

Exercice 6

$\sum_{i=1}^{n} i$

- Notons P_n la proposition $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- P_1 est vraie, en effet on a bien $\frac{1\times(1+1)}{2} = 1$
- Supposons que P_n est une proposition vraie et montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- On exprime la somme jusqu'à $n+1$ en fonction de la somme jusqu'à n :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

- On utilise P_n (supposée vraie) :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- P_{n+1} est donc nécessairement vraie si P_n est vraie.
- P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

$\sum_{i=1}^{n} i^2$

- Notons P_n la proposition $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- P_1 est vraie, en effet on a bien $\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6} = 1$
- Supposons que P_n est une proposition vraie et montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- On exprime la somme jusqu'à $n+1$ en fonction de la somme jusqu'à n :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

- On utilise P_n (supposée vraie) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}\end{aligned}$$

Exercice 6

$\sum_{i=1}^{n} i^2$ (suite)

- On fait apparaître $(n+2)$ dans le dernier facteur :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \frac{(n+1)\left[(n+2)(2n+1)-2(2n+1)+6(n+2)-6\right]}{6}\\ &= \frac{(n+1)\left[(n+2)(2n+7)-4n-8\right]}{6}\\ &= \frac{(n+1)\left[(n+2)(2n+7)-4(n+2)\right]}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

- P_{n+1} est donc nécessairement vraie si P_n est vraie.
- P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

$\sum_{i=1}^{n} x^{i-1}$

- Notons P_n la proposition $\sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ pour $x \neq 0$.

- P_1 est vraie, en effet on a bien $\frac{1-x}{1-x} = 1^0$

- Supposons que P_n est une proposition vraie et montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\sum_{i=1}^{n+1} x^{i-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

- On exprime la somme jusqu'à $n+1$ en fonction de la somme jusqu'à n :

$$\sum_{i=1}^{n+1} x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} + x^n$$

- On utilise P_n (supposée vraie) :

$$\sum_{i=1}^{n+1} x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x} + x^n = \frac{1-x^n+(1-x)x^n}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

- P_{n+1} est donc nécessairement vraie si P_n est vraie.

- P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

- $A \cap B$ est l'ensemble des multiples de 2 et 3 :

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{6, 12, 18, \dots\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 6\} = C \end{aligned}$$

- $A \cap C = C$ car $C \subset A$.

- $A \cup C = A$ car $C \subset A$.

- $B \cup C = B$ car $C \subset B$.

- $C \cap D$ est l'ensemble des multiples de 6 et 8 :

$$C = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, \dots\}$$

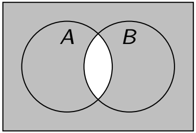
$$D = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, \dots\}$$

$$C \cap D = \{24, 48, 72, \dots\}$$

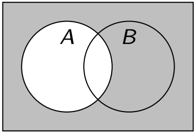
Exercice 8

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

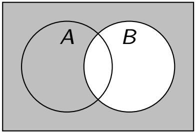
- L'ensemble $A \cap B$ correspond à la surface dans la lentille (en blanc dans la figure 1a), $\overline{A \cap B}$ correspond à tout ce qui n'est pas dans la lentille (en gris dans la figure 1a).
- L'ensemble $\overline{A} \cup \overline{B}$ est l'union des surfaces grisées dans les figures 1b et 1c, qui est identique à la surface grisée dans la figure 1a.



(a) $\overline{A \cap B}$



(b) $\overline{A}$



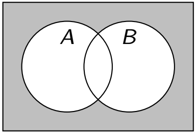
(c) $\overline{B}$

Figure 1 – Diagramme de Venn et loi de Morgan

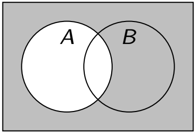
Exercice 8 (suite)

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

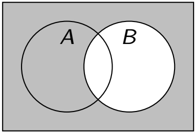
- L'ensemble $A \cup B$ correspond à la surface dans la ≪ double patate ≫ (en blanc dans la figure 2a), $\overline{A \cup B}$ correspond à tout ce qui n'est pas dans la ≪ double patate ≫ (en gris dans la figure 2a).
- L'ensemble $\overline{A} \cap \overline{B}$ est l'intersection des surfaces grisées dans les figures 2b et 2c, qui est identique à la surface grisée dans la figure 2a.



(a) $\overline{A \cup B}$



(b) $\overline{A}$



(c) $\overline{B}$

Figure 2 – Diagramme de Venn et loi de Morgan

Exercice 9

- $A \times (B \cup C) = \{a, b\} \times \{1, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) = \big\{&(a, 1), (a, 3), (a, 4), (a, 5) \\ &(b, 1), (b, 3), (b, 4), (b, 5)\big\} \end{aligned}$$

- On a :

$$A \times B = \big\{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3)\big\}$$

et

$$A \times C = \big\{(a, 4), (a, 5), (b, 4), (b, 5)\big\}$$

puis :

$$\begin{aligned} (A \times B) \cup (A \times C) &= \big\{(a, 1), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (b, 4), (b, 5)\big\} \\ &= A \times (B \cup C) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Distributivité du produit cartésien par rapport à l'union.

Exercice 9 (suite)

- Notons que $B \cap C = \emptyset$ est un ensemble vide, le produit cartésien d'un ensemble avec l'ensemble vide est un ensemble vide, $A \times (B \cap C) = \emptyset$.

- Nous avons déjà calculé $A \times B$ et $A \times C$, qui n'ont aucun élément commun. On a donc $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$.

Exercice 10

On utilise :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

En remplaçant les valeurs fournies dans l'ennoncé, on obtient :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = 20 + 15 - 6 = 29$$

Exercice 11

- On commence par traduire l'énoncé. On note $\mathscr{O}$ l'ensemble des obèses, $\mathscr{H}$ l'ensemble des salariés avec de l'hypertension et $\mathscr{C}$ l'ensemble des salariés avec du cholestérol.
- On sait que :
  - $\mathrm{Card}(\mathscr{O}) = 30$, $\mathrm{Card}(\mathscr{H}) = 25$, $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) = 20$.
  - $\mathrm{Card}(\mathscr{H} \cap \mathscr{C}) = 12$, $\mathrm{Card}(\mathscr{H} \cap \mathscr{O}) = 15$, $\mathrm{Card}(\mathscr{C} \cap \mathscr{O}) = 10$
  - $\mathrm{Card}(\mathscr{H} \cap \mathscr{C} \cap \mathscr{O}) = 5$
- On peut déduire :
  - $\mathrm{Card}((\mathscr{O} \cap \mathscr{H}) \setminus \mathscr{C}) = 15 - 5 = 10$, $\mathrm{Card}((\mathscr{O} \cap \mathscr{C}) \setminus \mathscr{H}) = 10 - 5 = 5$, $\mathrm{Card}(\mathscr{O} \setminus \mathscr{C} \setminus \mathscr{H}) = 30 - 10 - 5 - 5 = 10$
  - $\mathrm{Card}((\mathscr{H} \cap \mathscr{C}) \setminus \mathscr{O}) = 12 - 5 = 7$, $\mathrm{Card}(\mathscr{H} \setminus \mathscr{C} \setminus \mathscr{O}) = 25 - 10 - 5 - 7 = 3$
  - $\mathrm{Card}(\mathscr{C} \setminus \mathscr{H} \setminus \mathscr{O}) = 20 - 5 - 5 - 7 = 3$
- On cherche à déterminer la valeur de $\mathrm{Card}(\overline{\mathscr{H} \cup \mathscr{C} \cup \mathscr{O}})$, c'est-à-dire le nombre de salariés sans aucune de ces pathologies.
- Il faut compter le nombre d'éléments dans $\mathscr{H} \cup \mathscr{C} \cup \mathscr{O}$ et retrancher ce total au nombre de salariés dans l'entreprise (50).

Exercice 11 (suite)

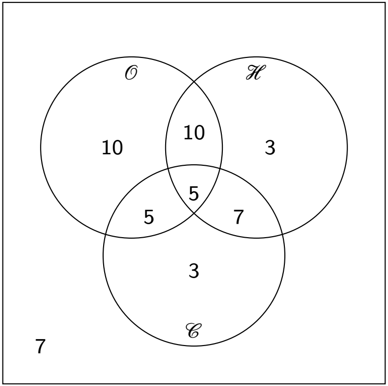


Figure 3 – Pathologies des salariés.

Seulement 7 $(50 - 10 - 10 - 5 - 5 - 3 - 7 - 3)$ salariés ne souffrent d'aucune des trois pathologies.

Exercice 12

On sait que : $\mathrm{Card}(S) = 55$, $\mathrm{Card}(S \cap G) = 9$, $\mathrm{Card}(S \cap E) = 7$, $\mathrm{Card}(G \cap E) = 8$, $\mathrm{Card}(S \cap G \setminus E) = 6$, $\mathrm{Card}(S \cup G) = 80$ $\mathrm{Card}(E \setminus S \setminus G) = 12$ et que le nombre total d'étudiants et 100.

(i) $\mathrm{Card}(S \cap G \cap E) = \mathrm{Card}(S \cap G) - \mathrm{Card}(S \cap G \setminus E) = 9 - 6 = 3$

(ii) En exploitant la formule du cardinal de l'union de deux ensembles :

$$\begin{aligned} & \mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(S \cup G) - \mathrm{Card}(S) + \mathrm{Card}(S \cap G) \\ \Rightarrow & \mathrm{Card}(G) = 80 - 55 + 9 = 34 \end{aligned}$$

Par ailleurs on a aussi : $\mathrm{Card}(G \cap E \setminus S) = \mathrm{Card}(S \cap G) - \mathrm{Card}(S \cap G \cap E) = 5$, on peut donc déduire le nombre d'étudiants qui font seulement de la gestion $\mathrm{Card}(G \setminus S \setminus E) = 34 - 6 - 3 - 5 = 20$.

(iii) On a $\mathrm{Card}(S \cap E \setminus G) = \mathrm{Card}(S \cap E) - \mathrm{Card}(S \cap E \cap G) = 4$, on a donc :

$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(S \cap E \setminus G) + \mathrm{Card}(G \cap E \setminus S) + \mathrm{Card}(G \cap E \cap S) + \mathrm{Card}(E \setminus G \setminus S) = 24$$

Exercice 12 (suite)

Le nombre d'étudiants seulement en sociologie est 42 :

$$\mathrm{Card}(S \backslash E \backslash G) = \mathrm{Card}(S) - \mathrm{Card}(S \cap G \backslash E) - \mathrm{Card}(S \cap E \backslash G) - \mathrm{Card}(S \cap E \cap G) = 55 - 6 - 3 - 4$$

En sommant les nombres inscrits dans le diagramme de Venn, en figure 4, on obtient le nombre d'étudiants en sociologie, gestion ou économie :

$$\mathrm{Card}(S \cup G \cup E) = 42 + 20 + 12 + 6 + 3 + 4 + 5 = 92$$

(iv) Finalement : $\mathrm{Card}(\overline{S \cup G \cup E}) = 100 - \mathrm{Card}(S \cup G \cup E) = 8.$

Exercice 12 (suite)

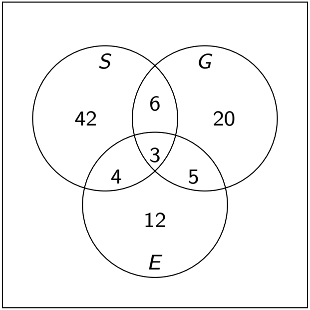


Figure 4 – Répartition des étudiants.

Exercice 13

- L'ensemble (relation binaire) $\mathscr{E}_1$ n'est pas une fonction car l'élément 2 possède deux images distinctes (8 et 3).
- L'ensemble $\mathscr{E}_2$ n'est pas un ensemble car chaque élément dans l'ensemble de départ possède une infinité d'images.
- L'ensemble $\mathscr{E}_3$ est une fonction (non bijective).
- L'ensemble $\mathscr{E}_4$ est une fonction (non bijective).

Exercice 14

Nous avons :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^2 + 2(x+h) + 4 \\ &= x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h + 4 \\ &= x^2 + 2x + 4 + h^2 + 2hx + 2h \end{aligned}$$

et donc :

$$f(x+h) - f(x) = h^2 + 2hx + 2h$$

puis :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = h + 2x + 2$$

Ce ratio représente la pente de la corde de la fonction entre les points $(x, f(x))$ et $(x+h, f(x+h))$. En toute généralité cette pente dépend de h, sauf si la fonction f est linéaire (ce n'est pas le cas ici). Plus tard on fera tendre h vers zéro et la limite du ratio correspondra à la pente de la tangente de la fonction au point x (la dérivée).

Exercice 15

Pour qu'une fonction f soit injective il faut et il suffit que deux éléments distincts dans l'ensemble de départ aient des images distinctes par f.

Ce n'est clairement pas le cas de cette fonction, à cause du terme en x^2 (parabole). Par exemple $x = 1$ et $x = -2$ ont la même image par f (0). Ces deux valeurs de x sont les racines (évidentes) du polynôme d'ordre 2.

Exercice 16

i On a :

$$h(x) = g(f(x)) = 2(x+2) + 5 = 2x + 9$$

et

$$m(x) = f(g(x)) = (2x+5) + 2 = 2x + 7$$

on note que ces deux fonctions sont différentes, la composition de fonctions n'est généralement pas commutative.

ii Les fonctions réciproques sont :

$$f^{-1}(x) = x - 2 \quad \text{et} \quad g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

iii On a :

$$h^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{9}{2} \quad \text{et} \quad m^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$$

iv On a :

$$f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right) = \frac{x}{2} - \frac{9}{2} \quad \text{et} \quad g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$$

Exercice 17

1. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$,
3. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$,
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, $f(x) < f(y)$, et
5. $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$ et $f(x) \geq f(y)$.