

# CALCUL ÉCONOMIQUE

Mercredi 18 décembre 2024

*Les réponses non commentées ou insuffisamment détaillées ne seront pas considérées. Prenez le temps d'écrire des phrases.*

**EXERCICE 1** Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions. Le connecteur de Sheffer (nous ne l'avons pas vu en cours, il est très utilisé en informatique où il est généralement appelé *nand*) est noté et défini comme :  $P \bar{\wedge} Q = \overline{P \wedge Q}$ . **(1)** Construire une table logique pour donner les valeurs de vérité de  $P \bar{\wedge} Q$  et définir en français (c'est-à-dire avec des mots) ce connecteur. **(2)** Montrer que  $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \bar{\wedge} P) \bar{\wedge} (Q \bar{\wedge} Q)$ . **(3)** Montrer que  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \bar{\wedge} (Q \bar{\wedge} Q)$ .

**EXERCICE 2** Calculer les racines du polynôme suivant :

$$P(X) = X^3 - 4X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{5}{2}$$

**EXERCICE 3** Résoudre l'équation suivante :

$$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$$

en montrant que cette équation n'admet qu'une seule solution.

**EXERCICE 4** Soit la fonction à valeurs réelles  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ . **(1)** Cette fonction est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ? Pourquoi? **(2)** Calculer, lorsqu'elle existe, la dérivée de cette fonction,  $f'(x)$ , en

utilisant la définition de la dérivée.

**EXERCICE 5** Soit la fonction à valeurs réelles  $f(x) = \frac{2+x}{x^3+x^2-x+2}$ . **(1)** Cette fonction est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ? Pourquoi? **(2)** Construire une fonction  $g(x)$  continue sur  $\mathbb{R}$  la plus proche possible de la fonction  $f(x)$ .

**EXERCICE 6** Soient  $f : E \rightarrow F$  une fonction bijective dérivable deux fois. Calculer, quand elle existe, la dérivée seconde de la fonction réciproque  $f^{-1}(x)$ .

**EXERCICE 7** Soit la fonction à valeurs réelles  $f(x) = x^{-\log x}$ . **(1)** Quel est le domaine de définition de cette fonction? **(2)** Montrer qu'il est possible d'écrire la fonction sous la forme :  $f(x) = e^{-(\log x)^2}$ . **(3)** Calculer la dérivée de la fonction  $f$  sur son domaine de définition. **(4)** Déterminer les limites de la fonction  $f$  sur les bords de son domaine de définition. **(5)** Étudier le signe de  $f'(x)$ . **(6)** La fonction  $f$  admet-elle un maximum? Pour quelle valeur de  $x$ ?