CALCUL ÉCONOMIQUE
(Éléments de correction)

Mercredi 18 décembre 2024

EXERCICE 1 Soient P et Q deux propositions. Le connecteur de Sheffer (nous ne l'avons pas vu en cours, il est très utilisé en informatique où il est généralement appelé `nand`) est noté et défini comme : $P \barwedge Q = \overline{P \wedge Q}$. **(1)** Définissons le connecteur de Sheffer à l'aide d'une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \barwedge Q$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Le connecteur de Scheffer est la négation d'une conjonction. **(2)** On utilise une table de vérité pour montrer que $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \barwedge P) \barwedge (Q \barwedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \barwedge P$	$Q \barwedge Q$	$(P \barwedge P) \barwedge (Q \barwedge Q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F

La troisième colonne et la dernière ont les mêmes valeurs de vérité, on a donc bien montré l'équivalence. **(3)** Pour montrer l'équivalence entre les propositions $P \Rightarrow Q$ et $P \barwedge (Q \barwedge Q)$, on utilise à nouveau une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \barwedge Q$	$P \barwedge (Q \barwedge Q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

La troisième colonne et la dernière ont les mêmes valeurs de vérité, on a donc bien montré l'équivalence.

EXERCICE 2 Les racines du polynôme suivant :

$$P(X) = X^3 - 4X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{5}{2}$$

sont 2 (la racine évidente), $1 + \frac{i}{2}$ et $1 - \frac{i}{2}$ (les racines complexes conjuguées).

EXERCICE 3 On veut résoudre l'équation suivante :

$$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$$

On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$(2^x)^2 - 2 \times 2^x - 3 = 0$$

Posons $X = 2^x$, on cherche $X > 0$ (car 2^x doit être positif) tel que :

$$X^2 - 2X - 3 = 0$$

Cette équation admet deux solutions réelles distinctes -1 et 3. Seule la seconde solution est pertinente (positive). On a donc :

$$2^x = 3$$

en prenant le logarithme népérien, il vient :

$$x \log 2 = \log 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2}$$

L'unique solution de l'équation $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.

EXERCICE 4 Soit la fonction à valeurs réelles $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. **(1)** Cette fonction est discontinue en $x = -1$ et $x = 1$ car en ces points le dénominateur est nul. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.**(2)** Par définition on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1-(x+h)^2} - \frac{1}{1-x^2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1-x^2-1+(x+h)^2}{(1-(x+h)^2)(1-x^2)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2xh+h^2}{(1-(x+h)^2)(1-x^2)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x+h}{(1-(x+h)^2)(1-x^2)} \\
&= \frac{2x}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

EXERCICE 5 Soit la fonction à valeurs réelles $f(x) = \frac{2+x}{x^3+x^2-x+2}$. **(1)** Cette fonction n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas définie en $x = -2$ où le numérateur et le dénominateur sont nuls. **(2)** Calculons la limite de la fonction quand x tend vers -2. Pour cela, notons que l'on peut factoriser le polynôme au dénominateur sous la forme $(2+x)\left(x^2 - x + 1\right)$, où le polynôme d'ordre deux n'admet pas de racines réelles (autrement dit $x = -2$ est le seul point de discontinuité). Pour le montrer vous pouvez utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou la division euclidienne. On a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} f(x) &= \lim_{x \to -2} \frac{2+x}{(2+x)(x^2-x+1)} \\
&= \lim_{x \to -2} \frac{1}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

On pose :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -2 \\ \frac{1}{7} & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, elle est identique à la fonction f partout sauf en un point.

EXERCICE 6 Soient $f : E \to F$ une fonction bijective dérivable deux fois. Pour calculer la dérivée première, on commence par noter que nous devons avoir :

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

En dérivant par rapport à x et en exploitant la règle de dérivation en chaîne :

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

En dérivant une seconde fois :

$$\left(f^{-1}\right)''(x) = -\frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}{\left(f'\left(f^{-1}(x)\right)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)''(x) = -\frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(x)\right)\right)^3}$$

La dérivée seconde de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$ est définie tant que la dérivée première de f est non nulle.

EXERCICE 7 Soit la fonction à valeurs réelles $f(x) = x^{-\log x}$. **(1)** Cette fonction est définie pour les valeurs (strictement) positives de x. **(2)** On a

$$\begin{aligned} e^{-(\log x)^2} &= \left(e^{\log x}\right)^{-\log x} \\ &= x^{-\log x} \end{aligned}$$

(3) En utilisant la seconde écriture de la fonction f, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left((\log x)^2\right)' e^{-(\log x)^2} \\ &= -\frac{2\log x}{x}x^{-\log x} \\ &= -2e^{-(\log x)^2}\frac{\log x}{x} \end{aligned}$$

(4) On a directement, toujours en utilisant la seconde écriture de la fonction, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

(5) La dérivée est nulle si $x = 1$, elle est positive si $x < 1$ et négative si x est plus grand. La fonction atteint donc un maximum global en $x = 1$.