

CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian *

Lundi 10 juin 2024

EXERCICE 1 (a) Rappeler à l'aide d'une table de vérité la définition de l'implication logique entre deux propositions P et Q . Montrer qu'il est possible de l'exprimer à l'aide d'un connecteur logique (\wedge ou \vee) et d'une (ou plusieurs) négation(s). **(b)** Rappeler à l'aide d'une table de vérité la définition de l'équivalence logique entre deux propositions P et Q . Montrer qu'il est possible de l'exprimer à l'aide de deux implications logiques et du connecteur logique \wedge . **(c)** Exprimer l'équivalence logique à l'aide de l'implication et du connecteur logique. Expliquer en quoi ce résultat est important.

EXERCICE 2 Soient deux propositions P et Q . Montrer que les propositions $Q \Rightarrow \bar{P}$ et $P \Rightarrow Q$ sont équivalentes. Donner un exemple de raisonnement utilisant ce résultat.

EXERCICE 3 (a) Rappeler la définition de la dérivée première d'une fonction. **(b)** Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

en utilisant la réponse à la question précédente, calculer la dérivée de cette fonction lorsqu'elle existe.

EXERCICE 4 Soit une fonction $f(x)$ telle que sa dérivée $f'(x)$ est égale à $f(x)$. **(a)** Posons $g(x) = f(\theta x)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n de g vérifie :

$$g^{(n)}(x) = \theta^n g(x)$$

(b) Connaissez vous une fonction satisfaisant la même propriété que la fonction f ? Laquelle ?

EXERCICE 5 Calculer les racines du polynôme suivant :

$$P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 3x - 5$$

EXERCICE 6 Soit l'équation d'une fonction f inconnue satisfaisant la contrainte suivante :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ donné. **(a)** Montrer qu'une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ ne peut satisfaire cette contrainte. **(b)** Montrer qu'une fonction de la forme $f(x) = e^{ax+b}$ satisfait la contrainte. Quelles doivent être les valeurs de a et b ? La solution est-elle unique ?

EXERCICE 7 Soit la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$$

(a) Identifier une valeur de x qui minimise cette fonction. **(b)** Montrer que le minimum est unique et global.

EXERCICE 8 (a) Représenter graphiquement une fonction convexe monotone croissante f . **(b)** Tracer une tangente à cette fonction en un point quelconque, disons x_0 . **(c)** Donner l'équation de cette tangente.

*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr