

# CALCUL ÉCONOMIQUE

Mercredi 13 décembre 2023

*Les réponses non commentées ou insuffisamment détaillées ne seront pas considérées. Prenez le temps de faire des phrases.*

**EXERCICE 1** Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  trois propositions. Montrer que la proposition  $(P \Leftrightarrow Q)$  est équivalente à la proposition  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ .

**EXERCICE 2** Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions. Le connecteur de Sheffer (nous ne l'avons pas vu en cours, il est très utilisé en informatique où il est généralement appelé `nand`) est noté et défini comme :  $P \bar{\wedge} Q = \overline{P \wedge Q}$ . **(1)** Construire une table logique pour donner les valeurs de vérité de  $P \bar{\wedge} Q$  et définir en français (c'est-à-dire avec des mots) ce connecteur. **(2)** Montrer que  $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \bar{\wedge} P) \bar{\wedge} (Q \bar{\wedge} Q)$ . **(3)** Montrer que  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \bar{\wedge} (Q \bar{\wedge} Q)$ .

**EXERCICE 3** Calculer les racines du polynôme suivant :

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + \frac{13}{4}X - \frac{5}{4}$$

**EXERCICE 4** Résoudre l'équation suivante :

$$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$$

en montrant que cette équation n'admet qu'une seule solution.

**EXERCICE 5** Soit la fonction à valeurs réelles  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . **(1)** Préciser son domaine de définition. **(2)** Cette fonction est-elle continue? Pourquoi? **(3)** Calculer, lorsqu'elle existe, la dérivée de cette fonction,  $f'(x)$ , en utilisant la définition de la dérivée (avec une limite).

**EXERCICE 6** Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux fonctions continues et dérivables deux fois. Calculer la dérivée seconde de  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

**EXERCICE 7** Soit la fonction à valeurs réelles  $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$ . **(1)** Quel est le domaine de définition de la fonction? **(2)** Quelle est la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini. **(3)** Montrer que cette fonction admet un minimum global.

**INDICE :** Pour étudier le signe de la dérivée de  $f$  (du numérateur car vous devriez trouver que le dénominateur est toujours positif) vous pouvez réécrire le numérateur comme un polynôme d'ordre deux à l'aide du changement de variable  $X = \sqrt{x}$ .