CALCUL ÉCONOMIQUE
(Éléments de correction)

Stéphane Adjemian [*]

Le 28 décembre 2024 à 9:14

EXERCICE 1 **(a)** L'implication logique est définie de la façon suivante, à l'aide d'une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

où P et Q sont deux propositions. Il est possible d'exprimer de façon équivalente la proposition $P \Rightarrow Q$ sous la forme $\overline{P} \vee Q$. Nous utilisons une table de vérité :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On note que sur chaque ligne des deux dernières colonnes nous avons les mêmes valeurs de vérité. Les deux propositions sont donc bien équivalentes.
(b) Deux propositions P et Q sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On peut montrer que l'équivalence entre P et Q peut s'exprimer comme $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. On utilise encore une table de vérité :

[*] Université du Mans. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Les valeurs des deux dernières colonnes sont identiques, nous avons donc bien montré l'équivalence entre ces deux propositions. **(c)** Ce résultat nous dit que pour établir l'équivalence entre deux propositions P et Q, on peut décomposer la preuve en deux parties en montrant d'abord que $P \Rightarrow Q$ puis en montrant la réciproque $Q \Rightarrow P$.

EXERCICE 2 On utilise une table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

La dernière colonne et la troisième colonne ont les mêmes valeurs de vérité sur chaque ligne, les deux propositions sont donc bien équivalentes. La proposition $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est la contraposée de la proposition $P \Rightarrow Q$. Un raisonnement par contraposition consiste à montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ pour établir que $P \Rightarrow Q$. Supposons que la proposition P soit ¡¡ Il pleut ¿¿ et la proposition Q soit ¡¡ Il y a des nuages ¿¿ . On a bien $P \Rightarrow Q$ (la présence de nuages dans le ciel est bien une condition nécessaire pour qu'il pleuve). Il est tout aussi évident que ¡¡ Il n'y a pas de nuages ¿¿ implique ¡¡ Il ne pleut pas ¿¿.

EXERCICE 3 **(a)** En cours nous avons vu que la dérivée première est définie comme une limite, de la façon suivante :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(b) Nous avons :

$$f(x+h) = \frac{1}{1-(x+h)^2}$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{1-(x+h)^2} - \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1 - x^2 - 1 + (x+h)^2}{(1-(x+h)^2)(1-x^2)} \\ &= \frac{(2x+h)h}{(1-(x+h)^2)(1-x^2)} \end{aligned}$$

puis :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2x+h}{(1-(x+h)^2)(1-x^2)}$$

Finalement la dérivée est la limite de la dernière expression quand h tend vers zéro, c'est-à-dire le ratio des limites au numérateur et au dénominateur (il n'y a pas d'indétermination dans ce cas) :

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

EXERCICE 4 **(a)** On a $g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\theta x)$, par la formule de dérivation en chaîne, on a donc :

$$g'(x) = \theta g(x)$$

c'est-à-dire la dérivée de θx par rapport à x, fois la dérivée de f évaluée en θx (sachant que la dérivée de f est f). La formule est donc correcte au premier rang ($n = 1$). Supposons que la formule soit vraie au rang n et montrons alors qu'elle est alors nécessairement vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que :

$$g^{(n+1)}(x) = \theta^{n+1} g(x)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= (g^n(x))' \\ &= (\theta^n g(x))' \\ &= \theta^n g'(x) \\ &= \theta^n \theta g(x) \\ &= \theta^{n+1} g(x) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient de la formule supposée vraie au rang n, la troisième vient des régles de dérivation (la dérivée d'une constante fois une fonction est égale à la constante fois la dérivée de la fonction), la quatrième égalité vient de la formule démontrée vraie au rang 1. Nous retrouvons donc bien la formule au rang $n + 1$, lorsqu'elle est vraie au rang n. La formule est donc vraie pour toutes les valeurs de n. **(b)** La fonction exponentielle satisfait la même propriété que la fonction f.

EXERCICE 5 On note que $x = 1$ est une racine évidente puisque $P(1) = 0$. Le polynôme peut donc s'écrire sous la forme factorisée :

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

Il reste à déterminer les paramètres a, b et c. On procède par identification en développant l'expression précédente :

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

On doit donc avoir $a = 4$, $b - a = 4$ (donc $b = 8$), $c - b = -3$ (donc $c = 5$). Nous pouvons donc réécrire le polynôme sous la forme :

$$P(x) = (x-1)(4x^2 + 8x + 5)$$

Calculons les racines du polynôme d'ordre deux. Le discriminant est :

$$\Delta = 64 - 4 \times 4 \times 5 = -16$$

Puisque le discriminant est complexe, nous savons que les deux racines sont complexes :

$$x = \frac{8 \pm 4i}{8} = \begin{cases} -1 - \frac{i}{2} \\ -1 + \frac{i}{2} \end{cases}$$

Au final le polynôme $P(x)$ possède trois racines : $x = 1$, $x = -1 - \frac{i}{2}$ et $x = -1 + \frac{i}{2}$.

EXERCICE 6 **(a)** Dans ce cas, $f'(x) = a$ et on aurait donc :

$$\frac{a}{ax + b} = \alpha$$

Clairement il n'est pas possible de trouver a et b satisfaisant cette équation (notons que si $\alpha = 0$, alors l'équation est satisfaite pour $a = 0$, mais nous chercons une fonction f qui puisse vérifier la contrainte pour toute valeur de α). **(b)** Dans ce cas, on a : $f'(x) = ae^{ax+b}$ c'est-à-dire $f'(x) = af(x)$. Ainsi la contrainte est satisfaite si $a = \alpha$ et pour toute valeur de b. Puisque n'importe quelle valeur de b est acceptable, il existe une infinité (c'est-à-dire autant que de valeurs de b possibles) de fonctions f vérifiant la contrainte.

EXERCICE 7 Il suffit de noter (identité remarquable) qu'il est possible de réécrire la fonction sous la forme :

$$f(x) = (x + 1)^4 + 1$$

Puisque le premier terme est élevé à une puissance paire, il est forcément non négatif. Minimiser cette fonction revient à minimiser le premier terme, puisque le second terme (1) ne dépend pas de la variable de contrôle x. Le premier terme est nul (il ne peut pas être plus petit) lorsque $x = -1$. La fonction atteint donc sa valeur minimale en $x = -1$ et on a $f(-1) = 1$.

EXERCICE 8 Puisque la courbe est convexe, la tangente doit se situer sous la courbe représentative de la fonction. Pour trouver l'équation de la tangente à la courbe en x_0 il suffit de remarquer que la tangente passe par le point $(x_0, f(x_0))$ et que sa pente est donnée par la dérivée de la fonction évaluée en x_0, $f'(x_0)$. La tangente, que nous noterons $T(x)$ est donc de la forme :

$$T(x) = f'(x_0)x + b$$

où b est l'ordonée à l'origine qu'il nous reste à identifier. La tangente est une droite qui passe par les points $(0, b)$ et $(x_0, f'(x_0)$, comme sa pente est $f'(x_0)$, nous devons avoir :

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - b} = f'(x_0)$$

soit de façon équivalente :

$$b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

Nous avons finalement :

$$T(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

ou encore :

$$T(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$$