

CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian *

Le 11 janvier 2018

EXERCICE 1 Calculer les racines du polynôme :

$$P(x) = x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{6}x - \frac{1}{6}$$

EXERCICE 2 Déterminer la dérivée de la réciproque d'une fonction (en supposant que celle-ci existe).

EXERCICE 3 Montrer par récurrence l'inégalité suivante (pour tout $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$) :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

EXERCICE 4 Montrer que l'implication logique est transitive.

EXERCICE 5 Montrer qu'il est possible d'exprimer de façon équivalente la proposition $P \vee Q$, où P et Q sont des propositions, à l'aide du connecteur logique \wedge et de la négation.

EXERCICE 6 Montrer que la proposition :

$$P_n : 2^{2 \times n} + 2 \text{ est divisible par trois } \forall n \in \mathbb{N}$$

est vraie.

EXERCICE 7 Soit la fonction $y = f(x) = x^\alpha$ une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , avec α un paramètre réel positif inférieur à un. Cette fonction représente le niveau de production obtenu par une firme lorsqu'elle utilise une quantité x du facteur de production. **(1)** Représenter graphiquement cette fonction. **(2)** Discuter la concavité/convexité de cette fonction à partir d'un argument graphique. **(3)** Conclure sur la concavité/convexité à partir de la dérivée d'ordre 2 de f . **(4)** Cette firme doit payer la location du facteur de production. On note p le prix d'une unité du facteur de production en termes de bien produit. Posons la fonction :

$$\Pi(x) = x^\alpha - px$$

Interpréter cette fonction. Quel est le concept représenté par cette fonction? **(5)** Représenter graphiquement cette fonction. Cette fonction est-elle concave ou convexe? **(6)** Calculer la dérivée d'ordre un de la fonction Π . **(7)** Identifier la quantité x^* telle que $\Pi'(x^*) = 0$. Calculer $y^* = f(x^*)$ et $\Pi^* = \Pi(x^*)$. **(8)** Interpréter Π^* et la condition qui détermine x^* .

*Université du Mans.