

# CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian \*

Le 28 décembre 2024 à 9:13

**EXERCICE 1 (a)** Rappeler à l'aide d'une table de vérité la définition de l'implication logique entre deux propositions  $P$  et  $Q$ . Montrer qu'il est possible de l'exprimer à l'aide d'un connecteur logique ( $\wedge$  ou  $\vee$ ) et d'une (ou plusieurs) négation(s). **(b)** Rappeler à l'aide d'une table de vérité la définition de l'équivalence logique entre deux propositions  $P$  et  $Q$ . Montrer qu'il est possible de l'exprimer à l'aide de deux implications logiques et du connecteur logique  $\wedge$ .

**EXERCICE 2** Soient deux propositions  $P$  et  $Q$ . Montrer que si  $\bar{P} \Rightarrow Q$  est une proposition vraie et si  $Q$  est une proposition fausse, alors la proposition  $P$  est nécessairement vraie. Dans quel type de raisonnement ce résultat est-il utilisé?

**EXERCICE 3** Soit la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$   $f(x) = x^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . **(a)** Rappeler la définition de la dérivée première d'une fonction. **(b)** Dans le cas  $n = 1$ , montrer que  $f'(x) = 1$  pour tout  $x$ . **(c)** Dans le cas  $n = 2$ , montrer que  $f'(x) = 2x$  pour tout  $x$ . **(d)** On suppose que la propriété :

$$P_n : \text{Si } f(x) = x^n \text{ alors } f'(x) = nx^{n-1}$$

est vraie. Montrer que la propriété :

$$P_{n+1} : \text{Si } f(x) = x^{n+1} \text{ alors } f'(x) = (n+1)x^n$$

est nécessairement vraie. **(e)** Conclure sur la dérivée première de la fonction  $f(x)$ .

**EXERCICE 4** Montrer que la proposition :

$$P_n : 2^{2 \times n} + 2 \text{ est un entier divisible par trois}$$

est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**EXERCICE 5** Calculer les racines du polynôme suivant :

$$P(x) = x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

**EXERCICE 6** On suppose que la demande, qui dépend du prix  $p$ , adressée à une entreprise est caractérisée par la fonction suivante :

$$D(p) = p^{-\epsilon}$$

avec  $\epsilon > 0$ . Dans la suite nous supposons que  $0 < \epsilon < 1$ . **(1)** Montrer que la demande est bien une fonction monotone décroissante du prix. **(2)** On définit l'élasticité de la demande au prix de la façon suivante :

$$\varepsilon(p) = D'(p) \frac{p}{D(p)}$$

Calculer cette élasticité et montrer qu'elle est constante. Comment s'interprète cette quantité? **(3)** Pour répondre à la demande l'entreprise doit supporter un coût (de production). On suppose que l'entreprise doit payer  $c > 0$  pour chaque unité de bien produite, c'est à dire que la fonction de coût est de la forme :

$$C(q) = cq$$

où  $q$  est la quantité de bien produite. Calculer  $C'(q)$ . Comment s'interprète cette quantité? **(4)** Justifier la forme de la fonction de profit de l'entreprise :

$$\Pi(q) = p^{1-\epsilon} - cp^{-\epsilon}$$

**(5)** Calculer les dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonction de profit. Montrer que la fonction de profit est concave. **(6)** Calculer le prix qui maximise le profit. Interpréter le résultat.

\*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr