

CALCUL ÉCONOMIQUE

(Éléments de correction)

Stéphane Adjemian *

Le 28 décembre 2024 à 9:13

EXERCICE 1 (a) L'implication logique est définie de la façon suivante, à l'aide d'une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

où P et Q sont deux propositions. Il est possible d'exprimer de façon équivalente la proposition $P \Rightarrow Q$ sous la forme $\bar{P} \vee Q$. Nous utilisons une table de vérité :

P	Q	\bar{P}	$\bar{P} \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On note que sur chaque ligne des deux dernières colonnes nous avons les mêmes valeurs de vérité. Les deux propositions sont donc bien équivalentes. **(b)** Deux propositions P et Q sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On peut montrer que l'équivalence entre P et Q peut s'exprimer comme $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. On utilise encore une table de vérité :

*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F

Les valeurs des deux dernières colonnes sont identiques, nous avons donc bien montré l'équivalence entre ces deux propositions.

EXERCICE 2 Il s'agit ici de justifier (en logique) le *reductio ad absurdum*. Le raisonnement par l'absurde consiste à établir la vérité d'une proposition en montrant que la proposition complémentaire (*i.e.* la négation de la proposition d'intérêt) aboutit à une proposition absurde. Évidemment, nous n'attachons aucun jugement moral à la notion d'absurdité, une proposition est absurde si elle est fausse. Soient deux propositions P et Q , il s'agit de montrer que si la proposition $\bar{P} \Rightarrow Q$ est vraie et si la proposition Q est fausse, alors la proposition P est forcément vraie. À cette fin nous utilisons une table de vérité.

P	Q	\bar{P}	$\bar{P} \Rightarrow Q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

La proposition $\bar{P} \Rightarrow Q$ est vraie sur les trois premières lignes du tableau. La proposition Q est fausse sur les lignes 2 et 4 du même tableau. L'intersection de ces deux ensembles de lignes (les lignes où $\bar{P} \Rightarrow Q$ est vraie et où Q est fausse) se réduit à une ligne du tableau : la deuxième. Sur cette ligne on observe que la valeur de la proposition P est V. Nous n'avons donc aucun doute sur la valeur de cette proposition et cela suffit à montrer la validité du raisonnement par l'absurde.

EXERCICE 3 (a) En cours nous avons vu que la dérivée première est définie comme une limite, de la façon suivante :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(b) Dans le cas $n = 1$, nous avons :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \forall x$$

(c) Dans le cas $n = 2$, nous avons :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2x \quad \forall x$$

(d) En notant que $x^{n+1} = xx^n$ et en appliquant la règle de dérivation d'un produit de fonction il vient :

$$(x^{n+1})' = x^n + x(x^n)'$$

En utilisant la proposition P_n , on obtient :

$$(x^{n+1})' = x^n + nx^{n-1}$$

soit encore, en factorisant :

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$$

Ainsi la proposition P_{n+1} est vraie, dès lors que P_n est vraie. **(e)** Nous pouvons conclure que la dérivée de la fonction puissance est $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 4 Pour $n = 0$, nous avons $2^{2 \times 0} + 2 = 3$ qui est bien un entier divisible par trois. Ainsi nous savons que la proposition P_0 est vraie. Montrons que si la proposition P_n est vraie alors la proposition est nécessairement vraie au rang $n + 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} + 2 &= 2^{2n+2} + 2 \\ &= 4 \times 2^{2n} + 2 \\ &= 3 \times 2^{2n} + 2^{2n} + 2 \end{aligned}$$

Puisque P_n est vraie, nous pouvons écrire $2^{2n} + 2 = 3\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{N}$. Nous avons donc :

$$2^{2(n+1)} + 2 = 3(2^{2n} + \kappa)$$

Puisque $2^{2n} + \kappa$ est un entier, $2^{2(n+1)} + 2$ est divisible par trois et donc la proposition P_{n+1} est vraie. Nous avons ainsi montré par récurrence que $2^{2n} + 2$ est un multiple de trois pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 5 On note que $x = 1$ est une racine évidente puisque $P(1) = 0$. Le polynôme peut donc s'écrire sous la forme factorisée :

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Il reste à déterminer les paramètres a , b et c . On procède par identification en développant l'expression précédente :

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

On doit donc avoir $a = 1$, $c = \frac{5}{4}$ et $b = 1$. Nous pouvons donc réécrire le polynôme sous la forme :

$$P(x) = (x - 1)\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right)$$

Calculons les racines du polynôme d'ordre deux. Le discriminant est :

$$\Delta = 1 - 4 \frac{5}{4} = -4$$

Puisque le discriminant est complexe, nous savons que les deux racines sont complexes :

$$x = \frac{1 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} - i \\ -\frac{1}{2} + i \end{cases}$$

Au final le polynôme $P(x)$ possède trois racines : $x = 1$, $x = \frac{1}{2} - i$ et $\frac{1}{2} + i$.

EXERCICE 6 (1) La dérivée de la fonction de demande est :

$$D'(p) = -\epsilon p^{-\epsilon-1}$$

comme ϵ est positif par hypothèse, la dérivée est forcément négative. La demande est donc bien une fonction décroissante du prix. **(2)** En substituant l'expression de la dérivée dans la définition de l'élasticité nous obtenons :

$$\begin{aligned}\epsilon(p) &= -\frac{p\epsilon p^{-\epsilon-1}}{p^{-\epsilon}} \\ \Leftrightarrow \epsilon(p) &= -\epsilon \quad \forall p\end{aligned}$$

L'élasticité ne dépend pas du prix. Ce résultat nous dit que la sensibilité de la demande aux variations du prix ne dépend pas du niveau du prix. Si le prix est de 10, une augmentation de 1% du prix induira une diminution de $\epsilon\%$ de la demande, si le prix est de 100, une augmentation de 1% du prix induira aussi une diminution de $\epsilon\%$ de la demande. **(3)** On a $C'(q) = c$ pour tout q . Cette dérivée est ce que les économistes appellent le coût marginal. Le coût subit par la firme pour produire une unité supplémentaire de bien est donnée par le coût marginal. Ici le coût marginal est constant, ce que la firme doit déboursier pour produire une unité de bien supplémentaire ne dépend pas de la quantité de bien déjà produite. **(4)** Le profit de la firme est la différence entre ses recettes et ses dépenses. Les recettes de la firme sont données par la quantité de bien produite multipliée par le prix de chaque unité de bien, c'est-à-dire $R(p) = p \times p^{-\epsilon} = p^{1-\epsilon}$. Les dépenses de la firme sont données par les coûts de production : $C(p) = C(D(p)) = cp^{-\epsilon}$. Ainsi le profit est :

$$\Pi(p) = R(p) - C(p) = p^{1-\epsilon} - cp^{-\epsilon}$$

(5) Les dérivées d'ordre un et deux de la fonction de profit sont :

$$\Pi'(p) = (1 - \epsilon)p^{-\epsilon} + c\epsilon p^{-\epsilon-1}$$

et

$$\Pi''(p) = -\epsilon(1 - \epsilon)p^{-\epsilon-1} - c(1 + \epsilon)\epsilon p^{-\epsilon-2}$$

On note que la dérivée d'ordre deux est négative pour toutes les valeurs du prix p , car ϵ est strictement compris entre 0 et 1 par hypothèse. **(6)** La dérivée première du profit est une fonction continue pour tout $p > 0$. Le prix qui annule la dérivée première du profit est le prix qui maximise le profit car la fonction de profit est concave. Cela revient à égaliser la recette marginale (*i.e.* la dérivée de la recette par rapport au prix) et le coût marginal (plus précisément la dérivée du coût par rapport au prix). Si on note p^* le prix qui maximise le profit, il doit satisfaire :

$$\begin{aligned}(1 - \epsilon)p^{*-\epsilon} &= -c\epsilon p^{*-\epsilon-1} \\ p^* &= \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}c\end{aligned}$$

Ici on doit se rendre compte qu'il y a un problème. Il est supposé plus haut que ϵ est plus petit que 1. Sous cette hypothèse le prix optimal est négatif, ce qui

n'a évidemment aucun sens ici. Nous avons trouvé une solution à un problème d'optimisation qui n'a aucun sens économique. Pour que la solution ait un sens il faudrait que ϵ soit plus grand que 1, de sorte que la recette diminue lorsque le prix augmente (l'augmentation du prix ne compense pas la baisse de la demande). Mais dans ce cas, nous devons vérifier que le prix qui annule la dérivée première du profit est bien un optimum. Notons $\mathcal{S}(x)$ le signe de x . Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(\Pi'(p)) &= \mathcal{S}((1 - \epsilon) + c\epsilon p^{-1}) \\
 &= \mathcal{S}(p(1 - \epsilon) + c\epsilon) \\
 &= -\mathcal{S}\left(p + c\frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\right) \\
 &= -\mathcal{S}\left(p - c\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}\right) \\
 &= \mathcal{S}(p^* - p)
 \end{aligned}$$

La dérivée première du profit est positive si le prix est inférieur à p^* et négative si le prix est supérieur à p^* . Le profit diminue donc dès lors que le prix s'éloigne de p^* , qui est donc bien le prix qui maximise le profit.

Notons que si le prix optimal positif (en supposant que $\epsilon > 1$) est bien donné par l'expression de p^* , alors ce prix est supérieur à c (le coût marginal par rapport aux quantités). Le prix sera d'autant plus grand, relativement au coût marginal, que la demande est peu élastique au prix. Ce résultat est intuitif dans la mesure où la firme peut plus librement fixer son prix si elle sait que la demande réagira peu à des augmentations de prix.