

# CALCUL ÉCONOMIQUE (Éléments de correction)

Stéphane Adjemian \*

Le 28 décembre 2024 à 9:13

**EXERCICE 1** Il faut faire une table de vérité. Puisque nous devons établir une proposition faisant intervenir trois propositions ( $P$ ,  $Q$  et  $R$ ) et que chacune de ces propositions peut prendre deux valeurs ( $V$  et  $F$ ), la table de vérité doit contenir  $2^3 = 8$  lignes.

$P$	$Q$	$R$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La proposition est donc vraie puisque la dernière colonne contient la valeur  $V$  (vraie) sur toutes les lignes.

**EXERCICE 2 (a)** Nous utilisons une table de vérité avec  $2^2 = 4$  lignes.

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Puisque la troisième colonne et la cinquième colonne ont les mêmes valeurs de vérité sur chaque ligne, on a bien l'équivalence entre  $P \Rightarrow Q$  et  $\bar{P} \vee Q$ . Autrement dit, il est possible d'exprimer l'implication logique avec une négation et le connecteur logique «ou». **(b)** On sait que l'équivalence logique est une double implication, c'est-à-dire que  $P \Leftrightarrow Q$  est équivalent à  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ . On vient de montrer que l'implication peut s'exprimer à l'aide d'une négation et du connecteur logique «ou». Par ailleurs nous savons que pour deux propositions  $A$  et  $B$  nous avons  $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ . Nous pouvons donc réécrire le résultat précédant sous la forme :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P \wedge \bar{Q}}$$

---

\*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

En faisant de même pour  $Q \Rightarrow P$  on obtient le résultat désiré.

**EXERCICE 3** Pour  $n = 1$ , nous avons bien  $1 + x \geq 1 + x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Pour  $n = 2$ , nous avons  $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$ , puisque le carré est non négatif, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Pour  $n = 3$ , si  $x$  est positif nous avons :  $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \geq 1 + 3x$  car la somme des deux derniers termes est nécessairement non négative. Supposons que l'inégalité soit vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  pour tout  $x \geq 0$ , et montrons que l'inégalité est nécessairement vérifiée au rang  $n + 1$ , c'est-à-dire que l'on a  $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$  pour tout  $x$  positif ou nul. Nous avons :

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \\ &\geq (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x \end{aligned}$$

où le passage de la première ligne à la deuxième est obtenu en substituant l'inégalité au rang  $n$  et en notant que le facteur  $(1 + x)$  est nécessairement positif. Nous avons donc bien retrouvé l'inégalité au rang  $n + 1$ . Cette inégalité est donc vraie pour tout  $n$ .

**EXERCICE 4** Cette proposition se lit comme suit : « Pour tout  $\epsilon$  positif, il existe  $\delta(\epsilon)$  positif, tel que pour tout  $x$  dans l'intervalle  $I$   $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  dès lors que  $|x - a| < \delta(\epsilon)$  ». Il s'agit de la définition d'une fonction continue sur l'intervalle  $I$ .

**EXERCICE 5** Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}$ . Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}(1 + x)^{-\frac{1}{3}}(2 - x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(1 + x)^{\frac{2}{3}}(2 - x)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}(1 + x)^{-\frac{1}{3}}(2 - x)^{-\frac{2}{3}}(2(2 - x) - (1 + x)) \\ &= \frac{1 - x}{(1 + x)^{\frac{1}{3}}(2 - x)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

La dérivée de  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en  $x = -1$  et  $x = 2$ , c'est-à-dire lorsque le dénominateur est nul. Nous avons des asymptotes en ces deux points :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) &= -\infty & \text{et} & & \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) &= -\infty & \text{et} & & \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) &= -\infty \end{aligned}$$

On remarque aussi que la dérivée est nulle en  $x = 1$ . Ces trois points sont des optima potentiels, il reste à vérifier qu'il y a bien un changement de signe des dérivées autour de ces points.

- Autour de  $x = -1$  nous avons :  $f'(x) < 0 \quad \forall x < -1$  et  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$ . Il y a donc bien un signe autour de la singularité en  $x = 1$ . Il s'agit d'un minimum local.
- Autour de  $x = 1$  nous avons :  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$  et  $f'(x) < 0 \quad \forall x > 1$ . Il y a un changement de signe de la pente autour du point où la dérivée est nulle. Il s'agit donc d'un maximum local.

— Autour de  $x = 2$  il n'y a pas de changement de signe de la pente puisque  $f'(x) < 0 \quad \forall x > 1$ . Il ne s'agit donc pas d'un optimum local.

Pour résumer, la fonction possède deux optima locaux : un minimum local au point  $x = -1$  et un maximum local au point  $x = 1$ .

**EXERCICE 6 (a)**  $f \circ g(x)$  est une fonction de  $I$  dans  $K$ . **(b)** Une composition de fonctions continues est continue. **(c)** La dérivée de  $f \circ g(x)$  est donnée (voir le cours) par :

$$\frac{d}{dx} f \circ g(x) = f'(g(x))g'(x)$$

**(d)** Il faut dériver la dérivée pour obtenir la dérivée d'ordre deux :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f \circ g(x) &= \left( \frac{d}{dx} f'(g(x)) \right) g'(x) + f'(g(x))g''(x) \\ &= f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \end{aligned}$$

**EXERCICE 7** On note que  $x = 1$  est une racine évidente puisque  $P(1) = 0$ . Le polynôme peut donc s'écrire sous la forme factorisée :

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Il reste à déterminer les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . On procède par identification en développant l'expression précédente :

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

On doit donc avoir  $a = 1$ ,  $c = \frac{5}{4}$  et  $b = 1$ . Nous pouvons donc réécrire le polynôme sous la forme :

$$P(x) = (x - 1)\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right)$$

Calculons les racines du polynôme d'ordre deux. Le discriminant est :

$$\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{5}{4} = -4$$

Puisque le discriminant est complexe, nous savons que les deux racines sont complexes :

$$x = \frac{1 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} - i \\ \frac{1}{2} + i \end{cases}$$

Au final le polynôme  $P(x)$  possède trois racines :  $x = 1$ ,  $x = \frac{1}{2} - i$  et  $\frac{1}{2} + i$ .

**EXERCICE 8** Soit  $f(x)$  une fonction continue en  $x_0$ . La dérivée de  $f$  en  $x_0$  est définie par la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Calculons la dérivée de la fonction exponentielle en utilisant cette définition :

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}\end{aligned}$$

En utilisant le résultat donné dans l'énoncé, on obtient :

$$(e^x)' = e^x$$