

# CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian \*

Le 28 décembre 2024 à 9:13

**EXERCICE 1** Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions. Montrer que :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Interpréter ce résultat.

**EXERCICE 2** Établir le résultat suivant :

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**EXERCICE 3** Soit une entreprise de production d'épingles. On suppose que le taux de croissance de sa production annuelle est  $g > 0$  (ce taux est supposé constant). La première année elle produit 1000 unités. Calculer le nombre d'années  $T$  tel que sa production cumulée (ie, en sommant les productions des  $T$  années) atteigne 100000 d'unités ?

**EXERCICE 4** Montrer par récurrence que si  $f(x) = x^n$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**EXERCICE 5** Soit la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$   $f(x) = x^4$ . Justifier et donner les valeurs des propositions suivantes :

1.  $f$  est une fonction continue.
2.  $f$  est une fonction monotone croissante.
3.  $f$  est une fonction bijective.
4.  $f$  est une fonction concave.

**EXERCICE 6** Calculer les racines du polynôme :

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 6$$

**EXERCICE 7** Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions.

1. Calculer la dérivée, par rapport à  $x$ , de  $\frac{1}{f(g(x))}$ .
2. Calculer la dérivée, par rapport à  $x$ , de  $h(f(g(x)))$ .
3. Calculer la dérivée d'ordre deux, par rapport à  $x$ , de  $f(g(x))$ .

---

\*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

**EXERCICE 8** Soit la fonction  $y = f(x) = x^\alpha$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$ , avec  $\alpha$  un paramètre réel positif inférieur à un. Cette fonction représente le niveau de production obtenu par une firme lorsqu'elle utilise une quantité  $x$  du facteur de production. **(1)** Représenter graphiquement cette fonction. **(2)** Discuter la concavité/convexité de cette fonction à partir d'un argument graphique. **(3)** Conclure sur la concavité/convexité à partir de la dérivée d'ordre 2 de  $f$ . **(4)** Cette firme doit payer la location du facteur de production. On note  $p$  le prix d'une unité du facteur de production en termes de bien produit. Posons la fonction :

$$\Pi(x) = x^\alpha - px$$

Interpréter cette fonction. Quel est le concept représenté par cette fonction? **(5)** Représenter graphiquement cette fonction. Cette fonction est-elle concave ou convexe? **(6)** Calculer la dérivée d'ordre un de la fonction  $\Pi$ . **(7)** Identifier la quantité  $x^*$  telle que  $\Pi'(x^*) = 0$ . Calculer  $y^* = f(x^*)$  et  $\Pi^* = \Pi(x^*)$ . **(8)** Interpréter  $\Pi^*$  et la condition qui détermine  $x^*$ .