CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian *

Le 28 décembre 2024 à 9:13

EXERCICE 1 Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 **(1)** Donner la définition de la dérivée d'une fonction. **(2)** Soit la fonction $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de montrer que la dérivée de cette fonction est $f'(x) = nx^{n-1}$. Montrer que cette formule est correcte pour $n = 1$ (en utilisant la définition de la dérivée). **(3)** Montrer que si la formule est vraie au rang n alors elle est nécessairement vraie au rang $n + 1$. Conclure.

EXERCICE 3 Sur un marché la demande pour un bien à la date t est linéaire par rapport au prix du bien :

$$q_t = a - bp_t$$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs. Sur le même marché, la quantité offerte à la date t dépend du prix anticipé (à la date $t-1$) pour la date t :

$$q_t = c + d\hat{p}_t$$

où c et d sont deux paramètres réels positifs, $\hat{p}_t$ est le prix anticipé pour la période t. On supposera que les anticipations sont naïves dans le sens où :

$$\hat{p}_t = p_{t-1}$$

À la date $t-1$, lorsqu'ils décident la quantité offerte en t, les offreurs anticipent que le prix à la date t sera le prix observé à la date $t-1$. **(1)** Montrer que la quantité offerte est égale à la quantité demandée si et seulement si le prix à la date t est donné par :

$$p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_{t-1} \equiv f(p_{t-1})$$

(2) Calculer le point fixe (on dit aussi état stationnaire) de cette équation récurrente pour le prix, c'est-à-dire calculer le prix invariant $p^\star$ tel que $p^\star = f(p^\star)$. Quelle hypothèse faut-il poser sur les paramètres pour que ce prix ait un sens ? **(3)** Montrer que $p^\star$ est le prix d'équilibre sur ce marché. Calculer la quantité échangée à l'équilibre. **(4)** Calculer le prix à la t. **(5)** Donner la condition sous laquelle le prix converge vers $p^\star$. Commenter. La convergence est-elle monotone ?

*Université du Mans. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

EXERCICE 4 Soit la fonction $f(x) = |x|$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle bijective ? Pourquoi ?
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Pourquoi ?
3. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Pourquoi ?

EXERCICE 5 Soit la fonction $y = f(x) = x^\alpha$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, avec α un paramètre réel positif inférieur à un. Cette fonction représente le niveau de production obtenu par une firme lorsqu'elle utilise une quantité x du facteur de production. **(1)** Représenter graphiquement cette fonction. **(2)** Discuter la concavité/convexité de cette fonction à partir d'un argument graphique. **(3)** Conclure sur la concavité/convexité à partir de la dérivée d'ordre 2 de f. **(4)** Cette firme doit payer la location du facteur de production. On note p le prix d'une unité du facteur de production en termes de bien produit. Posons la fonction :

$$\Pi(x) = x^\alpha - px$$

Interpréter cette fonction. Quel est le concept représenté par cette fonction ? **(5)**. Représenter graphiquement cette fonction. Cette fonction est-elle concave ou convexe ? **(6)** Calculer la dérivée d'ordre un de la fonction Π. **(7)** Identifier la quantité $x^\star$ telle que $\Pi'(x^\star) = 0$. Calculer $y^\star = f(x^\star)$ et $\Pi^\star = \Pi(x^\star)$. **(8)** Interpréter $\Pi^\star$ et la condition qui détermine $x^\star$.

EXERCICE 7 Calculer les racines du polynôme :

$$P(x) = x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{6}x - \frac{1}{6}$$

EXERCICE 8 Déterminer la dérivée de la réciproque d'une fonction (en supposant que celle-ci existe).