CALCUL ÉCONOMIQUE
(Éléments de correction)

Stéphane Adjemian *

Le 28 décembre 2024 à 9:13

EXERCICE 1 Il faut faire une table de vérité. Puisque nous devons établir une proposition faisant intervenir trois propositions (P, Q et R) et que chacune de ces propositions peut prendre deux valeurs (V et F), la table de vérité doit contenir $2^3 = 8$ lignes.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La proposition est donc vraie puisque la dernière colonne contient la valeur V (vraie) sur toutes les lignes.

EXERCICE 2 **(1)** La dérivée d'une fonction f est définie par la limite suivante :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(2) Pour $n = 1$ on a $f(x) = x$. La formule nous dit alors que $f'(x) = 1 \times x^0 = 1$ pour tout x. Montrons que c'est bien le cas, en utilisant la définition de la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

La formule est donc correcte au rang $n = 1$. On suppose maintenant que la formule est correcte à un rang n quelconque, montrons qu'elle est alors nécessairement vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que nous avons bien :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+1} = (n+1)x^n$$

Nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \times x^n$$

*Université du Mans. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

En appliquant la règle $(uv)' = u'v + uv'$ il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = 1 \times x^n + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n$$

En substituant la formule supposée vraie au rang n :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = x^n + x \times n \times x^{n-1}$$

soit de façon équivalente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = x^n + n \times x^n$$

ou encore :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = (n+1)x^n$$

ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE 3 Sur un marché la demande pour un bien à la date t est linéaire par rapport au prix du bien :

$$q_t = a - bp_t$$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs. Sur le même marché, la quantité offerte à la date t dépend du prix anticipé (à la date $t-1$) pour la date t :

$$q_t = c + d\hat{p}_t$$

où c et d sont deux paramètres réels positifs, $\hat{p}_t$ est le prix anticipé pour la période t. On supposera que les anticipations sont naïves dans le sens où :

$$\hat{p}_t = p_{t-1}$$

Les offreurs anticipent que le prix à la date t sera le prix observé à la date $t-1$. **(1)** Si l'offre est égale à la demande, alors on doit avoir :

$$a - bp_t = c + d\hat{p}_t$$

en substituant l'anticipation naïve, il vient :

$$a - bp_t = c + dp_{t-1}$$

soit de façon équivalente :

$$p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_{t-1}$$

(2) $p^\star$ doit satisfaire :

$$a - bp^\star = c + dp^\star$$
$$\Leftrightarrow a - c = (b+d)p^\star$$
$$\Leftrightarrow p^\star = \frac{a-c}{b+d}$$

Si $p_t = p^\star$ alors $p_{t+s} = p^\star$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Pour que ce point fixe puisse être interprété comme un prix il faut qu'il soit positif, c'est-à-dire que $a > c$. **(3)**

En substituant le point fixe $p^\star$ dans les fonctions d'offre et de demande, on remarque que :

$$D(p^\star) = S(p^\star) = \frac{da + bc}{b + d}$$

La quantité offerte égalise la quantité demandée. $p^\star$ est donc bien un prix d'équilibre. **(4)** Supposons que le prix à la date 0 soit $p_0 \neq p^\star$. On omet le cas où le prix est initialement à l'équilibre car on sait que le prix est alors à l'équilibre pour toute date $t > 0$. À la date 1, nous avons :

$$p_1 = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_0$$

À la date 2 :

$$p_2 = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_1 = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{d}{b}\right) + \left(\frac{d}{b}\right)^2 p_0$$

À la date 3 :

$$p_3 = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_2 = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{d}{b} + \left(\frac{d}{b}\right)^2\right) - \left(\frac{d}{b}\right)^3 p_0$$

Plus généralement nous devrions avoir :

$$p_t = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{d}{b} + \left(\frac{d}{b}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t-1}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)^t p_0$$

ou de façon équivalente :

$$p_t = \frac{a-c}{b}\sum_{\tau=0}^{t-1}\left(-\frac{d}{b}\right)^\tau + \left(-\frac{d}{b}\right)^t p_0$$

ou encore :

$$p_t = \frac{a-c}{b}\frac{1-\left(-\frac{d}{b}\right)^t}{1+\frac{d}{b}} + \left(-\frac{d}{b}\right)^t p_0$$

Admettons que cette formule soit correcte au rang t et montrons que nous retrouvons alors nécessairement la même au rang $t+1$. Nous avons

$$p_{t+1} = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_t$$

En substituant l'expression pour p_t, il vient :

$$p_{t+1} = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}\left(\frac{a-c}{b}\frac{1-\left(-\frac{d}{b}\right)^t}{1+\frac{d}{b}} + \left(-\frac{d}{b}\right)^t p_0\right)$$

$$\Leftrightarrow p_{t+1} = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{d}{b}\frac{1-\left(-\frac{d}{b}\right)^t}{1+\frac{d}{b}}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1} p_0$$

$$\Leftrightarrow p_{t+1} = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{\frac{d}{b}-\left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1}}{1+\frac{d}{b}}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1} p_0$$

$$\Leftrightarrow p_{t+1} = \frac{a-c}{b}\frac{1-\left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1}}{1+\frac{d}{b}} + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1} p_0$$

ce qu'il fallait démontrer. Nous avons donc bien obtenu l'expression du prix à la date t comme une fonction du prix initial (p_0) et des paramètres des fonctions de demande et d'offre. **(5)** Clairement le prix ne diverge pas que si $b < d$ de sorte que $\lim_{t\to\infty}(-{}^{b}/_{d})^t = 0$. Dans ce modèle où les anticipations sont naïves, il faut que la demande soit moins « pentue » que l'offre pour que prix ne diverge pas. Sous cette condition, on voit directement que :

$$\lim_{t\to\infty} p_t = p^\star$$

Le prix converge vers le prix d'équilibre du marché dès lors que $b < d$. Cette convergence n'est pas monotone. Pour le montrer, notons que nous pouvons écrire l'écart entre p_t et $p^\star$ comme une fonction de l'écart entre p_0 et $p^\star$:

$$p_t - p^\star = (p_0 - p^\star)\left(-\frac{b}{d}\right)^t$$

Clairement le signe de $p_t - p^\star$ change à chaque itération, la suite p_t oscille donc autour de $p^\star$.

EXERCICE 4 On note que $f(-1) = f(1) = 1$, la fonction f n'est donc pas bijective puisque deux antécédents (1 et -1) ont la même image (1). On peut redéfinir la fonction valeur absolue par morceaux, de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \forall x \leq 0, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous pouvons donc réécrire la fonction f sous la forme de deux droites. Sur chaque sous intervalles (*ie* pour les valeurs négatives puis positives de x) la fonction est donc continue (les droites sont des fonctions continues). En zéro on vérifie que la limite de f est définie est égale à zéro. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$, mais pas en zéro, car en ce point les dérivées à droite (1) et à gauche (-1) sont différentes.

EXERCICE 5 **(1)** Pour la représentation graphique il faut remarquer que cette fonction est monotone croissante, que sa dérivée est monotone décroissante et qu'elle passe par les points $(0,0)$ et $(1,1)$. La représentation graphique doit ressembler à celle de $\sqrt{x}$. **(2)** Cette fonction est concave puisque les tangentes sont toutes au dessus de la courbe représentative. **(3)** Les dérivées d'ordre 1 et 2 sont :

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

et

$$f''(x) = -\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2}$$

Clairement, la dérivée d'ordre deux est négative pour tout x puisque $0 < \alpha < 1$. La fonction de production f est donc bien concave. **(4)** $\Pi(x)$ représente le profit de la firme comme une fonction de la quantité de facteur de production. Ce profit est exprimé en termes de quantité produite. **(5)** La fonction est définie pour les valeurs positive de x. Elle passe pas le point $(0,0)$, est croissante pour des petites valeurs de x puis devient décroissante, lorsque la variation du coût (c'est-à-dire le coût marginal, p) domine la variation de la production (c'est-à-dire la productivité marginal, $f'(x)$). Cette fonction est concave, puisque toutes les tangentes sont au dessus de la courbe représentative, on aussi peut vérifier que la dérivée d'ordre 2 est négative :

$$\Pi''(x) = f''(x)$$

(6) La dérivée d'ordre un de la fonction de profit est donnée par :

$$\Pi''(x) = f'(x) - p$$

(7) Nous savons que $f'(x)$ est une fonction continue (pour $x > 0$) positive et monotone décroissante, on peut aussi vérifier que $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$. Par construction, la fonction $\Pi'(x)$ hérite de ces propriétés. Ainsi nous savons que la fonction $\Pi'(x)$ ne s'annule qu'en un unique point que nous noterons $x^\star$ (*ie* il s'agit du point ou la courbe représentative de Π' croise l'axe des abscisses). Nous avons :

$$\begin{aligned}
\Pi'(x^\star) &= 0 \\
\Leftrightarrow \alpha\, {x^\star}^{\alpha-1} - p &= 0 \\
\Leftrightarrow {x^\star}^{\alpha-1} &= \frac{p}{\alpha} \\
\Leftrightarrow {x^\star}^{1-\alpha} &= \frac{\alpha}{p} \\
\Leftrightarrow x^\star &= \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

Il vient :

$$y^\star = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

et

$$y^\star = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - p\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(8) Puisque la fonction Π est concave, la valeur $x^\star$ qui annule la dérivée première de Π, est la quantité de facteur de production qui maximise le profit. Pour tout $x \neq x^\star$, on a $\Pi(x) < \Pi^\star$. Ainsi $Pi^\star$ est la valeur maximale du profit. La condition d'optimalité du profit est l'égalisation du coût marginal (p) et de la productivité marginale ($\alpha x^{alpha-1}$). Pour comprendre cette condition, supposons que x soit tel que la productivité marginale est supérieur au coût marginal. Dans ce cas la firme a intérêt à augmenter la quantité de facteur de production (et donc à augmenter la quantité produite) puisque le gain lié à une augmentation de x est supérieur au coût induit. Cette augmentation contribue à réduire l'excès de la productivité marginale relativement au coût marginal, puisque la productivité marginal décroît lorsque x augmente. Dans une situation où la productivité marginale est différente du coût marginal, la firme a toujours intérêt à dévier (en augmentant ou diminuant la quantité de facteur de production, x).

EXERCICE (7) On note que 1 est une racine évidente, puisque $P(1) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = 0$. On peut réécrire le polynôme sous la forme[1] :

$$P(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$$

En développant, on a aussi :

$$P(x) = x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c$$

Par identification, nous devons donc avoir :

$$\begin{cases} -\frac{1}{6} & = b - 1 \\ -\frac{4}{6} & = c - b \\ \frac{1}{6} & = c \end{cases}$$

Nous avons donc $c = {}^1\!/_6$ et $b = {}^5\!/_6$, et donc :

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)$$

Pour calculer les racines du polynôme d'ordre deux on calcule le discriminant associé :

$$\Delta = \frac{25}{36} - \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$$

Ainsi les racines du polynôme d'ordre deux sont :

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{5}{6} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{12}$$

Au total, les racines de $P(x)$ sont donc 1, $-{}^1\!/_2$ et $-{}^1\!/_3$.

EXERCICE 8 Soit f une fonction bijective. D'après la définition, la fonction réciproque f^{-1} est définie implicitement par :

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

En appliquant la formule de dérivation en chaîne sur les deux membres de cette égalité il vient :

$$f^{-1\,\prime}(f(x))f'(x) = 1$$

soit de façon équivalente :

$$f^{-1\,\prime}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

La dérivée de la fonction réciproque est donnée par l'inverse de la fonction dérivée.

1. Il est évident que le coefficient associé à x^2 doit être égal à 1.