

CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian *

Le 28 décembre 2024 à 9:13

EXERCICE 1 Soit deux propositions P et Q . Montrer que $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$

EXERCICE 2 (1) Donner la définition de la dérivée d'une fonction. **(2)** Soit la fonction $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de montrer que la dérivée de cette fonction est $f'(x) = nx^{n-1}$. Montrer que cette formule est correcte pour $n = 1$ (en utilisant la définition de la dérivée). **(3)** Montrer que si la formule est vraie au rang n alors elle est nécessairement vraie au rang $n + 1$. Conclure.

EXERCICE 3 On note y_t le PIB de la France à la date t et on suppose que cette variable est déterminée par l'équation :

$$y_t = 1,02y_{t-1}$$

avec une condition initiale $y_0 = 1$. **(1)** Quel est le taux de croissance du PIB? **(2)** Donner le niveau du PIB à la date t . **(3)** Calculer le nombre de périodes nécessaires pour doubler le niveau du PIB. **(4)** Montrer que le niveau du PIB tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini.

EXERCICE 4 Sur un marché la demande pour un bien à la date t est linéaire par rapport au prix du bien :

$$q_t = a - bp_t$$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs. Sur le même marché, la quantité offerte à la date t dépend du prix anticipé (à la date $t - 1$) pour la date t :

$$q_t = c + d\hat{p}_t$$

où c et d sont deux paramètres réels positifs, \hat{p}_t est le prix anticipé pour la période t . On supposera que les anticipations sont naïves dans le sens où :

$$\hat{p}_t = p_{t-1}$$

Les offreurs anticipent que le prix à la date t sera le prix observé à la date $t - 1$. **(1)** Montrer que la quantité offerte est égale à la quantité demandée si et seulement si le prix à la date t est donné par :

$$p_t = \frac{a - c}{b} - \frac{d}{b}p_{t-1} \equiv f(p_{t-1})$$

*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

(2) Calculer le point fixe (on dit aussi état stationnaire) de cette équation récurrente pour le prix, c'est-à-dire calculer p^* tel que $p^* = f(p^*)$. Quelle hypothèse faut-il poser sur les paramètres pour que ce prix ait un sens? **(3)** Montrer que p^* est le prix d'équilibre sur ce marché. Calculer la quantité échangée à l'équilibre. **(4)** Calculer le prix à la t . **(5)** Donner la condition sous laquelle le prix converge vers p^* . Commenter. La convergence est-elle monotone?

EXERCICE 5 Montrer que la fonction $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, n'est pas bijective.

EXERCICE 6 Donner trois conditions assurant la convexité d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

EXERCICE 7 Sur un marché la quantité offerte (q) est donnée comme une fonction du prix par :

$$q = p^2$$

et la demande est déterminée par :

$$q = 6 - p$$

(1) Montrer qu'il existe un unique prix d'équilibre $p^* > 0$. **(2)** Donner une représentation graphique des fonctions de demande et d'offre, et de l'équilibre.

EXERCICE 8 Soient f et g deux fonctions pour lesquelles les dérivées d'ordre 1 et deux sont définies. **(1)** Quelle est la dérivée de la composition $f(g(x))$? **(2)** Calculer la dérivée d'ordre deux de $f(g(x))$. **(3)** Quelle est la dérivée d'ordre deux de $h(x) = x^4$. **(4)** Vérifier que la formule obtenue pour la dérivée d'ordre deux donne un résultat correcte si $f(g(x)) = (x^2)^2$.