Calcul Économique

I. Prologue

Stéphane Adjemian

stephane.adjemian@univ-lemans.fr

Septembre 2024

Plan

Calcul propositionnel

Implication logique

Les grands types de raisonnements

Les ensembles

Les fonctions

Les quantificateurs

Un peu de vocabulaire

- **Axiome**. Un énoncé supposé vrai a priori, sans preuve, et qu'on ne cherche pas à démontrer.
- **Proposition**. Un énoncé qui peut être vrai (V) ou faux (F).
- **Théorème**. Une proposition (démontrée) vraie.
- **Corollaire**. Un « petit » théorème conséquence d'un autre théorème.
- **Lemme**. Un « petit » théorème préparatoire d'un autre théorème.
- **Conjecture**. Une proposition supposée vraie, sans preuve, tant que l'on n'exhibe pas un contre exemple.

Calcul propositionnel

Proposition et table de vérité

- Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. On dit que vrai (V) ou faux (F) sont les valeurs de vérité d'une proposition.

- Dans la suite on représentera souvent les valeurs de vérité d'une proposition, notée P par exemple, dans une table :

P
V
F

Table 1 – Table de vérité

Calcul propositionnel

Équivalence logique, I

Définition 1

Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles sont simultanément vraies et simultanément fausses. On note $P \Leftrightarrow Q$.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Table 2 – Équivalence logique

L'équivalence logique entre propositions joue un rôle analogue à l'égalité entre des nombres (ou des ensembles comme nous le verrons plus loin).

Nous venons de créer une nouvelle proposition ($P \Leftrightarrow Q$) à partir de deux propositions (P et Q)

Calcul propositionnel

Équivalence logique, II

On note que la table de vérité contient $4 = 2^2$ lignes.

Plus généralement si nous devons construire une nouvelle proposition à partir de n propositions, la table de vérité devra contenir 2^n lignes.

On note aussi la méthode utilisée pour définir les valeurs de vérité des propositions P et Q. On commence par poser que la proposition P est vraie, puis on considère les deux valeurs de vérité possibles pour la seconde proposition Q. Après on pose que la proposition P est fausse...

Exemple 1

Les expressions 3+2 et 4+1, même si elles ne sont pas identiques, ont la même valeur, on dit que ces expressions sont égales $(3 + 2 = 4 + 1)$. Les propositions $(x^2 = 1)$ et $(x = 1 \text{ ou } x = -1)$ sont distinctes mais équivalentes, on écrit :

$$(x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$$

Définition 2

La négation d'une proposition P, notée $\bar{P}$, change sa valeur de vérité.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Table 3 – Négation

Théorème 1

Soit P une proposition, alors $\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P$.

↬ À montrer avec une table de vérité.

Connecteurs logiques

La conjonction $\wedge$, I

Définition 3

La conjonction de deux propositions P et Q, on note $P \wedge Q$ et on lit « P et Q », est vraie si et seulement si les deux propositions sont vraies.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table 4 – Conjonction logique

On retient que la conjonction de deux propositions est fausse dès lors qu'au moins une proposition est fausse.

Connecteurs logiques

La conjonction $\wedge$, II

Propriétés 1

Soient P, Q et R des propositions. La conjonction satisfait les propriétés suivantes :

1. **Idempotence :** $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$.
2. **Commutativité :** $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$.
3. **Associativité :** $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R)$.
4. **Non contradiction :** La proposition $P \wedge \bar{P}$ est fausse.

On démontre facilement ces propriétés en utilisant des tables de vérité.

On note que dans la dernière propriété (4) nous venons de construire une proposition (disons Q) dont la valeur de vérité est certaine, alors que nous ne connaissons pas la valeur de vérité de la proposition de départ (P).

- On montre la première propriété à l'aide d'une table de vérité :

P	$P \wedge P$
V	V
F	F

Puisque les colonnes ont toujours les mêmes valeurs sur chaque ligne, les deux propositions $P \wedge P$ et P sont équivalentes (voir la définition 1).

- On procède de la même façon pour la deuxième propriété. Les propositions à droite et à gauche du symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ font intervenir deux propositions P et Q. La table de vérité doit donc contenir quatre lignes qui correspondent aux couples ordonnés possibles pour les valeurs de P et Q :

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

On observe que les troisième et quatrième colonnes ont toujours la même valeur sur chaque ligne, les deux propositions associées $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont donc équivalentes.

- Nous suivons la même démarche pour la troisième propriété. Cette fois nous construisons des propositions à partir de trois propositions de base P, Q et R. La table de vérité doit donc contenir huit lignes (c'est-à-dire 2^3 lignes) :

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

On note que la cinquième et la septième colonnes sont identiques, ce qui démontre la troisième propriété.

- Pour la dernière propriété la table de vérité contient seulement deux lignes :

P	$\bar{P}$	$P \wedge \bar{P}$
V	F	F
F	V	F

On remarque que la dernière colonne est toujours fausse.

Connecteurs logiques

La disjonction $\vee$, I

Définition 4

La disjonction de deux propositions P et Q, on note $P \vee Q$ et on lit « P ou Q », est fausse si et seulement si les deux propositions sont fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table 5 – Disjonction logique

On retient que la disjonction de deux propositions est vraie dès lors qu'au moins une proposition est vraie.

On considère ici une définition *inclusive* de la disjonction (par opposition à une définition *exclusive*).

Connecteurs logiques

La disjonction $\vee$, II

Propriétés 2

Soient P, Q et R des propositions. La disjonction satisfait les propriétés suivantes :

1. **Idempotence :** $(P \vee P) \Leftrightarrow P$.
2. **Commutativité :** $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$.
3. **Associativité :** $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R)$.
4. La proposition $P \vee \bar{P}$ est vraie.

On démontre facilement ces propriétés en utilisant des tables de vérité.

Nous retrouvons les mêmes propriétés que pour la conjonction (à part pour la dernière).

- On montre la première propriété à l'aide d'une table de vérité :

P	$P \vee P$
V	V
F	F

Puisque les colonnes ont toujours les mêmes valeurs sur chaque ligne, les deux propositions $P \vee P$ et P sont équivalentes (voir la définition 1).

- On procède de la même façon pour la deuxième propriété. Les propositions à droite et à gauche du symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ font intervenir deux propositions P et Q. La table de vérité doit donc contenir quatre lignes qui correspondent aux couples ordonnés possibles pour les valeurs de P et Q :

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

On observe que les troisième et quatrième colonnes ont toujours la même valeur sur chaque ligne, les deux propositions associées $P \vee Q$ et $Q \vee P$ sont donc équivalentes.

- Nous suivons la même démarche pour la troisième propriété. Cette fois nous construisons des propositions à partir de trois propositions de base P, Q et R. La table de vérité doit donc contenir huit lignes :

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

On note que les cinquième et septième colonnes sont identiques, ce qui démontre la troisième propriété.

- Pour la dernière propriété la table de vérité contient seulement deux lignes :

P	$\bar{P}$	$P \vee \bar{P}$
V	F	V
F	V	V

On remarque que la dernière colonne est toujours vraie.

Connecteurs logiques

Disjonction, conjonction et négation

Propriétés 3 (Distributivité)

Soient trois propositions P, Q et R, on a :

1. $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
2. $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

Théorème 2 (Loi de Morgan)

Soient P et Q deux propositions, on a :

1. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$.
2. $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$.

La loi de Morgan souligne le lien entre la conjonction et la disjoinction, que nous pouvions déjà anticiper en comparant les tables de vérité respectives.

La négation d'une conjonction est la disjonction des négations.

Preuve de la propriété 9. On montre seulement la première propriété, pour la seconde on suit exactement la même approche, toujours en utilisant une table de vérité. On dénombre huit triplets de valeurs de vérité pour les propriétés P, Q et R. La table est donc formée de huit lignes :

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

Preuve du théorème 2. On démontre seulement le premier point, on peut suivre la même approche pour le second. On utilise une table de vérité de quatre lignes :

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Implication logique

Le connecteur $\Rightarrow$, I

Définition 5

Soient deux propositions P et Q. La proposition $P \Rightarrow Q$, on dit « P implique Q », est fausse si P est vraie **et** Q est fausse, la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie sinon.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Table 6 – L'implication logique

Ce connecteur logique peut paraître peu intuitif. . .

Si l'implication est vraie, Q vraie peut être déduite de P vraie.

Si l'implication est vraie, on ne peut rien inférer sur la vérité de Q lorsque P est fausse.

Exemple 2

Considérons une proposition qui ne devrait pas vous causer le moindre doute :

Pour tout entier relatif n, si $n > 2$ alors $n^2 > 4$

On note $R(n)$ la proposition précédente, et on pose $P(n)$: « $n > 2$ » et $Q(n)$: « $n^2 > 4$ ». On peut vérifier que pour différentes valeurs de n on retrouve trois des lignes de la table de vérité de l'implication logique :

n	$P(n)$	$Q(n)$	$R(n)$
3	V	V	V
-3	F	V	V
1	F	F	V

où l'implication est vraie, mais pas le cas où l'implication est fausse (puisque $R(n)$ est vraie pour tout n).

Exemple 3 ($F \Rightarrow F$ est vraie)

Montrons que si $10^n + 1$ est divisible par 9, alors $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9, pour tout entier n.

La première proposition, $10^n + 1$ est divisible par 9, exige l'existence d'un entier k tel que $10^n + 1 = 9k$. Nous avons :

$$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 9 = 9 \times (10k - 1)$$

et donc $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9.

Clairement la proposition « $10^n + 1$ divisible par 9 implique $10^{n+1} + 1$ divisible par 9 » est vraie. Il est tout aussi évident que la proposition « $10^n + 1$ divisible par 9 » est fausse. Il suffit de considérer le cas n=0 pour s'en convaincre.

Exemple 4 ($F \Rightarrow V$ est vraie)

Soit la proposition P : « $2 = 3$ et $2 = 1$ ». Cette proposition est clairement fausse, néanmoins en sommant les deux égalités on obtient :

$$2 + 2 = 3 + 1$$
$$4 = 4$$

la proposition Q : « $4 = 4$ » est évidemment vraie (forfuitement). Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q peut être vraie même si P est fausse. Autrement dit un raisonnement correcte peut (par chance) amener à un résultat correct même si le prémisse est faux.

Théorème 3 (Transitivité)

Soient P, Q et R trois propositions. On a :

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie (Cf. la première ligne de la table de vérité 6). Si $Q \Rightarrow R$ est vraie, alors puisque Q est vraie on en déduit que R est vraie.

Cette propriété de transitivité sera souvent exploitée.

Pour démontrer le théorème on procède toujours en construisant une table de vérité (à huit lignes).

Preuve du théorème 3. La table de vérité contient huit lignes psuique nous travaillons avec trois propositions : P, Q et R :

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Comme la dernière colonne est vraie sur toutes les lignes, c'est-à-dire pour tout triplet de valeurs de vérité des propositions P, Q et R, la proposition relative à la transitivité de l'implication logique est vraie.

Théorème 4 (Équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On a :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

Cette expression de l'équivalence en termes d'implications est très importante. Quand on vous demande d'établir une équivalence, il faut garder à l'esprit que la preuve se décomposera en deux parties (une pour chaque implication)

On retouvera la même idée quand on cherchera (voir la section suivante) à établir que deux ensembles A et B sont identiques. Il faut montrer que l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B et que l'ensemble B est contenu dans l'ensemble A.

Preuve du théorème 4.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Puisque les colonnes 3 et 6 ont les mêmes valeurs de vérité sur chaque ligne les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont équivalentes, comme annoncée dans le théorème.

Implication logique

$\Rightarrow$, $\Leftarrow$ et $\Leftrightarrow$, II

Les expressions « condition nécessaire et suffisante » (CNS), « si et seulement si » (ssi) ou encore « il faut et il suffit », font toutes référence à l'équivalence logique.

Ainsi pour établir qu'une condition est nécessaire et suffisante il faudra décomposer la preuve en deux parties :

- montrer que la condition P est nécessaire $(Q \Rightarrow P)$
- montrer que la condition P est suffisante $(Q \Leftarrow P)$

Exemple 5

- La proposition « $(x+1=3) \Rightarrow \left((x+1)^2 = 9\right)$ » est vraie. Il est *suffisant* que $x+1$ soit égal à 3 pour que $(x+1)^2$ soit égal à 9.
- La proposition « $(x+1=3) \Leftarrow \left((x+1)^2 = 9\right)$ » n'est pas vraie. Il n'est pas *nécessaire* que $x+1$ soit égal à 3 pour que $(x+1)^2$ soit égal à 9.
- Les deux propositions ne sont pas équivalentes.

Définition 6 (Réciproque d'une implication)

Soient deux propositions P et Q. L'implication $Q \Rightarrow P$ est la réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Remarque : Si deux propositions P et Q sont équivalentes alors par le théorème 4 l'implication et sa réciproque sont vraies.

Définition 7 (Contraposée d'une implication)

Soient deux propositions P et Q. L'implication $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Théorème 5 (Contraposée)

Soient P et Q deux propositions. On a : $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

Preuve du théorème 5. La proposition $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est fausse si et seulement si $\bar{Q}$ est vraie et $\bar{P}$ est fausse, c'est-à-dire si et seulement si Q est fausse et P est vraie. Ainsi $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ a les mêmes valeurs de vérité que $P \Rightarrow Q$ les deux propositions sont donc équivalentes.

Implication logique

Connecteurs logiques

Théorème 6

Soient P et Q deux propositions. On a :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$$

Remarque : Par la loi de Morgan (théorème 2) on a aussi :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P \wedge \bar{Q}}$$

Ce résultat est très important, on peut exprimer l'implication à l'aide d'un connecteur logique et d'une (ou deux) négation(s).

Théorème 7

Soient P et Q deux propositions. On a :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\bar{P} \vee Q) \wedge (P \vee \bar{Q}))$$

Les grands types de raisonnements

Définition 8 (Modus ponens)

Si $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et si P est une proposition vraie alors Q est une proposition vraie.

- Le raisonnement déductif correspond à la première ligne de la table de vérité 6.
- On peut généraliser avec un nombre arbitraire d'implications, en utilisant la transitivité de l'implication (voir le théorème 3). Soient $(P_i, i = 1 \ldots, n)$ des propositions. Si $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_n$ est une proposition vraie, et si P_1 est une proposition vraie alors P_n est une proposition vraie.
- On peut généraliser à un ensemble dénombrable de propositions, voir plus loin le raisonnement par récurrence.

Définition 9 (Reductio ad absurdum)

Si $\overline{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et si Q est une proposition fausse alors P est une proposition vraie.

- On montre que la proposition P est vraie en montrant que P fausse aboutit à une contradiction logique.
- Le raisonnement par l'absurde correspond à la dernière ligne de la table de vérité 6. Si Q est une proposition fausse, alors la proposition $\overline{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\overline{P}$ est fausse, c'est-à-dire P vraie.
- Contrairement au raisonnement déductif, ici on ne comprend pas vraiment pourquoi P est vraie. C'est une limite du raisonnement par l'absurde.

Les grands types de raisonnements

Exemple de raisonnement par l'absurde

Montrons qu'il existe une infinité de nombres premiers.

- Supposons qu'il existe seulement n nombres premiers : $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ (par exemple 2, 3, 5, 7 et 11).
- Posons $P = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$.
- Clairement P est plus grand que p_n.
- P est-il un nombre premier ?
  - Si P est premier, alors il y a plus de n nombres premiers. Cela contredit l'hypothèse de départ.
  - Si P n'est pas un nombre premier, alors il est divisible par un nombre premier. Par construction P n'est pas divisible par $p_1, \ldots, p_n$. Il doit donc exister au moins un autre nombre premier plus grand que p_n. À nouveau, cela contredit l'hypothèse de départ.

Définition 10 (Modus tollens)

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ il faut et il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

- Voir le théorème 5.

- Montrer que la proposition « n^2 pair implique n pair » est équivalent à montrer que la proposition « n impair implique n^2 impair». Or si n est impair alors il peut s'écrire sous la forme $n = 2k + 1$ avec k un entier. En prenant le carré :

$$n^2 = (2k+1)^2 \Leftrightarrow n^2 = 2(2n+2k)+1 \Leftrightarrow n^2 = 2\not{k} + 1$$

  et donc n^2 est impair. On conclut que la proposition de départ « n^2 pair implique n pair » est vraie.

Définition 11

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier n. Pour montrer que cette proposition est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en deux étapes :

1. On montre que la proposition P_{n_0} est vraie,
2. On montre que, pour un entier $n \geq n_0$ quelconque, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie (ou la proposition $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie).

- La première étape est l'*initialisation* de la récurrence, la seconde étape est l'*hérédité*.
- En répétant indéfiniment l'étape 2, on obtient en partant de P_{n_0} vraie : P_{n_0+1} vraie, P_{n_0+2} vraie, P_{n_0+3} vraie, ...

Les grands types de raisonnements

Exemple de raisonnement par récurrence, I

- Montrons qu'un polygône convexe à n côtés possède $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

- On vérifie facilement que la prédiction est correcte pour un triangle ($n = 3$) : un triangle n'a pas de diagonales !

- Soit un polygône convexe avec n sommets ou côtés, voir l'illustration. Supposons qu'il ait $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonales et montrons qu'un polygône avec $n + 1$ sommets a nécessairement $d_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ diagonales.

- Créons un polygône à $n + 1$ sommets, $\mathscr{P}_{n+1}$, à partir de d'un polygône à n sommets, $\mathscr{P}_n$. Notons A_1, A_2, ..., A_n les sommets de $\mathscr{P}_n$.

- On construit $\mathscr{P}_{n+1}$ en créant un nouveau sommet A_{n+1} entre A_1 et A_2 à l'extérieur du polygône (de sorte que le nouveau polygône soit convexe, autrement certaines diagonales sortiraient du polygône).

Les grands types de raisonnements

Exemple de raisonnement par récurrence, II

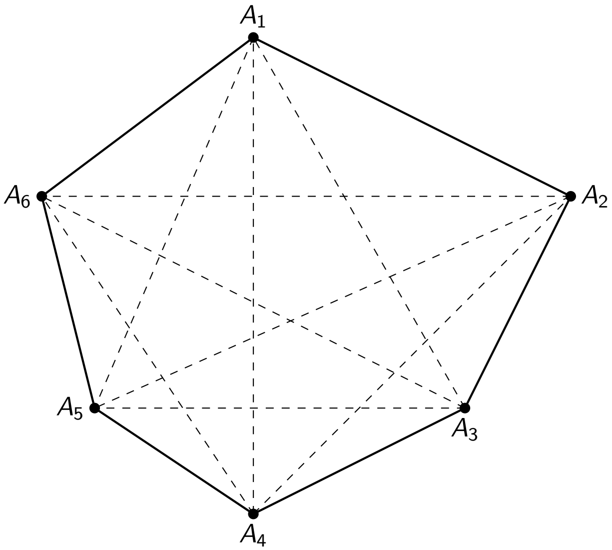
- Les diagonales de $\mathscr{P}_n$ sont des diagonales de $\mathscr{P}_{n+1}$.
- En reliant A_{n+1} à A_3, A_4, ..., A_n on obtient $n-2$ nouvelles diagonales dans $\mathscr{P}_{n+1}$.
- La dernière diagonale de $\mathscr{P}_{n+1}$ est le segment A_1A_2 (un côté de $\mathscr{P}_n$).
- Au total, nous avons :

$$d_{n+1} = \frac{n(n-3)}{2} + n - 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow d_{n+1} = \frac{n^2 - n - 2}{2} \Leftrightarrow d_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

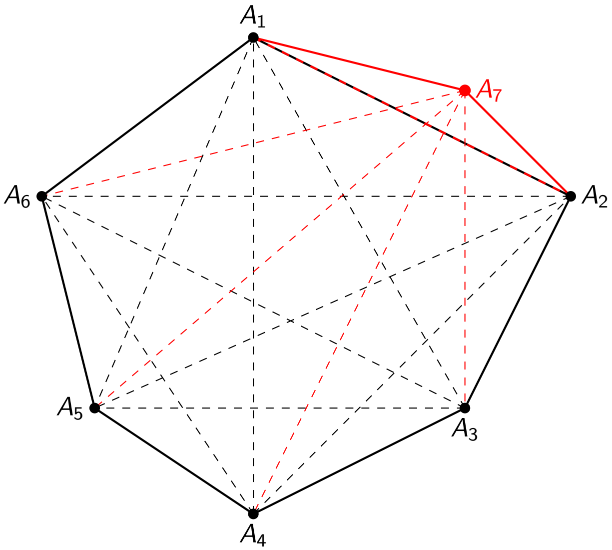
Les grands types de raisonnements

Exemple de raisonnement par récurrence, III (héxagone)



Les grands types de raisonnements

Exemple de raisonnement par récurrence, III (héptagone)



Les ensembles

Définition 12

Un ensemble est une collection d'objets.

- Les éléments d'un ensemble peuvent être de types variés (nombres, lettres, mots, phrases, ensembles, ...).
- Un ensemble peut être défini par une liste exhaustive des éléments qui le compose. Par exemple :

$$A = \{1, 3\}$$

- Un ensemble peut être défini à partir d'une règle (indispensable si l'ensemble contient un nombre infini d'éléments). Par exemple :

$$B = \{x \text{ entier naturel} \mid x \text{ est un nombre impair }\}$$

Les ensembles

Notations

- $\in$ note l'appartenance d'un élément à un ensemble : $5 \in B$.
- $\notin$ note la non appartenance d'un élément à un ensemble : $6 \notin B$.
- $\emptyset$ note l'ensemble vide : $\emptyset = \{\}$.
- $\subseteq$ note l'inclusion d'un ensemble dans un autre : $A \subseteq B$ si tout élément de A est aussi un élément de B.
- $\subset$ note l'inclusion stricte d'un ensemble dans un autre : $A \subset B$ si tout élément de A est aussi un élément de B *et* s'il existe au moins un élément de B qui n'appartient pas à A.
- Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.
- On note Ω l'ensemble universel qui contient tout les ensembles.

Les ensembles

Exemples

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.

  $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ \text{et}\ b \neq 0 \right\}$$

  Ces ensembles vérifient $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Les intervalles sur la droite des réels :

  $$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \end{aligned}$$

Les ensembles

Remarques

Ne pas confondre $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$, qui n'est pas vide puisqu'il contient l'ensemble vide.

Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. La proposition $\pi \in \mathbb{R}$ dit que le nombre π appartient à l'ensemble des réels, **mais** la proposition $\pi \subset \mathbb{R}$ n'a pas de sens car π n'est pas un ensemble. La proposition $[0,1] \subset \mathbb{R}$ dit que l'intervalle $[0,1]$ est un sous ensemble de l'ensemble des réels, **mais** la proposition $[0,1] \in \mathbb{R}$ n'a pas de sens car cet interval n'est pas un élément de l'ensemble des réels.

- Le symbole d'appartenance, $\in$, relie un élément à un ensemble ; le symbole d'inclusion, $\subset$, relie deux ensembles.

Propriété 4

Pour tout ensemble A, l'ensemble vide $\emptyset$ est un sous ensemble de A.

Si $\emptyset$ n'est pas inclus dans A, alors il existe au moins un élément de l'ensemble vide qui n'appartienne pas à A. Or, l'ensemble vide ne contient aucun élément, *a fortiori* aucun élément qui n'appartienne pas à A. Donc tout élément de $\emptyset$ appartient à A, ainsi $\emptyset$ est un sous ensemble de A.

Les ensembles

Quantificateurs

Pour définir un ensemble ou décrire ses propriétés, on utilise souvent des phrases comme : ≪ il existe ≫, ≪ il n'existe pas ≫, ≪ il existe un unique ≫, ≪ pour tout x ≫, ... Afin d'abréger on utilise les notations suivantes :

$\forall$ → pour tout (par exemple $\forall x \in A$ se lit ≪ pour tout x dans l'ensemble A ≫).

$\exists$ → il existe (par exemple $\exists x \in A$ tel que $x \notin B$, se lit ≪ il existe un élément x dans A qui n'appartient pas à B ≫).

$\exists!$ → il existe un unique.

$\nexists$ → il n'existe pas.

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés de ces quantificateurs.

Définition 13

L'union de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est un ensemble contenant les éléments des ensembles A et B. Plus formellement, $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Propriétés 5

1. L'union est associative. Soient A, B et C trois ensembles, alors $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
2. L'union est commutative. Soient A et B deux ensembles, alors $A \cup B = B \cup A$.
3. L'union est idempotente. Soit A un ensemble, alors $A \cup A = A$.
4. $\emptyset$ est l'élément neutre de l'union. Soit A un ensemble, alors $A \cup \emptyset = A$

- Quand on écrit $A \cup B = B \cup A$, ou plus généralement quand on considère l'égalité de deux ensembles, il faut comprendre que $A \cup B \subseteq B \cup A$ et $B \cup A \subseteq A \cup B$. Pour montrer l'égalité de deux ensembles il faut donc montrer deux inclusions.

- On peut généraliser en considérant un ensemble dénombrable d'ensembles. Par exemple, soit $E = \{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ où chaque E_i est un ensemble. On peut définir l'union de ces ensembles : $\mathscr{E} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$. La proposition $x \in \mathscr{E}$ est équivalente à la proposition $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_i$.

Preuve de Propriétés 5. (2) Pour établir la commutativité nous devrions montrer que si $x \in A \cup B$ alors $x \in B \cup A$ et que si $x \in B \cup A$ alors $x \in A \cup B$ (voir la première remarque plus haut). La preuve est très simple, car l'opérateur union hérite des propriétés de l'opérateur logique $\vee$ (la disjonction). En effet,

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B, \text{ par définition de l'union} \\ &\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A, \text{ car la disjonction est commutative} \\ &\Leftrightarrow x \in B \cup A \end{aligned}$$

(1) On montre tout aussi simplement que l'union est associative :

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A \cup \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C), \text{ car la disjonction est associative} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

(3) On procède de la même façon en rappelant que la disjonction est idempotente, voir Propriétés 2. (4) Car $\emptyset$ est un élément de A.

Définition 14

L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est un ensemble contenant les éléments communs des ensembles A et B. Plus formellement, $A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$.

Propriétés 6

1. L'intersection est associative. Soient A, B et C trois ensembles, alors $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
2. L'intersection est commutative. Soient A et B deux ensembles, alors $A \cap B = B \cap A$.
3. L'intersection est idempotente. Soit A un ensemble, alors $A \cap A = A$.
4. Ω est l'élément neutre de l'intersection. Soit A un ensemble, alors $A \cap \Omega = A$

- On peut généraliser en considérant un ensemble dénombrable d'ensembles. Par exemple, soit $E = \{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ où chaque E_i est un ensemble. On peut définir l'intersection de ces ensembles : $\mathscr{E} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i$. La proposition $x \in \mathscr{E}$ est équivalente à la proposition $\forall i \in \mathbb{N}, x \in E_i$.

Preuve de Propriétés 6. On suit la même démarche que pour la preuve de Propriétés 5, l'intersection hérite des propriétés de la conjonction. Par exemple, pour la commutativité, on a :

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B, \text{ par définition de l'intersection} \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A, \text{ car la conjonction est commutative} \\ &\Leftrightarrow x \in B \cap A \end{aligned}$$

Définition 15

La différence de deux ensembles A et B, notée $A \setminus B$, est un ensemble contenant les éléments de A qui n'appartiennent pas à B. Plus formellement, $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$.

Propriétés 7

1. Soit A un ensemble, alors $A \setminus A = \emptyset$.
2. Soit A un ensemble, alors $A \setminus \emptyset = A$.
3. Soit A un ensemble, alors $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
4. Soit A un ensemble, alors $A \setminus \Omega = \emptyset$.

Les ensembles

Complémentaire

Définition 16

Le complémentaire d'un ensemble A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à A. Plus formellement, $\bar{A} = \{x \in \Omega | x \notin A\}$.

Propriétés 8

1. Soit A un ensemble, alors $A \cup \bar{A} = \Omega$.
2. Soit A un ensemble, alors $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
3. $\bar{\emptyset} = \Omega$ et $\bar{\Omega} = \emptyset$.
4. Soient A et B deux ensembles tels que $A \subseteq B$, alors $\bar{B} \subseteq \bar{A}$.
5. Soit A un ensemble, alors $\bar{\bar{A}} = A$.

Les ensembles

Distributivité

Propriétés 9

Soient A, B et C trois ensembles.

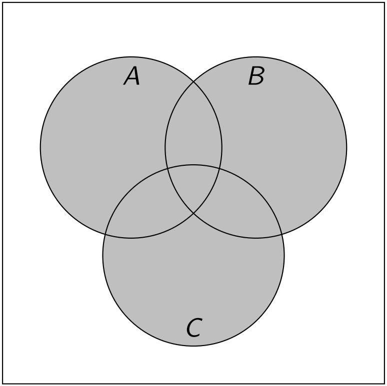
1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
4. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

Preuve de Propriétés 9. On se contente de montrer la première propriété, le reste est laissé comme exercice. On a :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C), \text{ en exploitant la distributivité de la disjonction et conjonction} \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Les ensembles

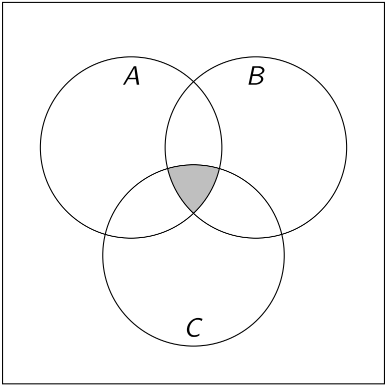
Diagramme de Venn, union



$A \cup B \cup C$

Les ensembles

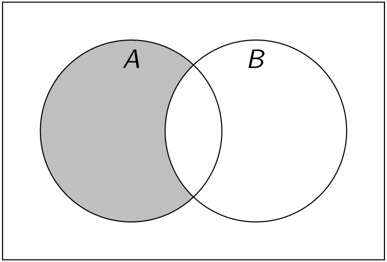
Diagramme de Venn, intersection



$A \cap B \cap C$

Les ensembles

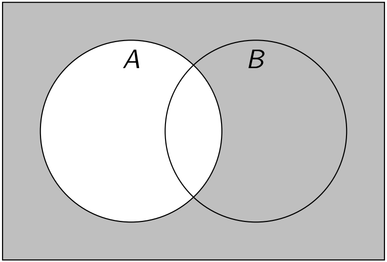
Diagramme de Venn, différence



$A \setminus B$

Les ensembles

Diagramme de Venn, complémentaire



$\bar{A}$

Les ensembles

Opérateurs binaires et complémentaire

Théorème 8 (Loi de Morgan)

Soient A et B deux ensembles. On a :

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Théorème 9

Soient A et B deux ensembles. On a :

1. $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup B$.
2. $\bar{A} \setminus \bar{B} = B \setminus A$.

Preuve du théorème 8. Montrons que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, le second point est laissé en exercice.

- Montrons d'abord que $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$. C'est à dire que si x est dans $\overline{A \cup B}$ alors x est nécessairement dans $\bar{A} \cap \bar{B}$. Soit $x \in \overline{A \cup B}$, alors $x \notin A \cup B$. Or
$$A \cup B = \{z | z \in A \lor z \in B\}$$
Ainsi il faut que $x \notin A \land x \notin B$, c'est-à-dire $x \in \bar{A} \land x \in \bar{B}$ (par définition du complémentaire), et donc $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ (par définition de l'intersection). Nous avons bien montré que $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.
- Montrons que $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Soit $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, par définition de l'intersection, cela se traduit par $x \in \bar{A} \land x \in \bar{B}$ ou encore, par définition du complémentaire, $x \notin A \land x \notin B$. Finalement, en rappelant que la négation d'une disjonction est une conjonction des négations, $\overline{x \in A \lor x \in B}$. Par définition de l'union nous avons donc : $x \in \overline{A \cup B}$. Ainsi nous avons bien montré que $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

Au total, nous avons l'égalité des deux ensembles (puisque chacun contient l'autre). Comme dans les preuves précédentes, on voit que nous héritons directement des propriétés des opérateurs logiques.

Afin de montrer le théorème 9 nous allons d'abord établir le lemme suivant :

Lemme Soient A et B deux ensembles. On a $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Preuve Nous avons :

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \land x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \land x \in \bar{B} \\ &\Leftrightarrow x \in A\, x \cap \bar{B}, \text{ par définition de l'intersection} \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Preuve du théorème 9. (1) Direct en utilisant le lemme et la loi de Morgan. (2) Direct en utilisant le lemme et la commutativité de l'intersection.

Définition 17

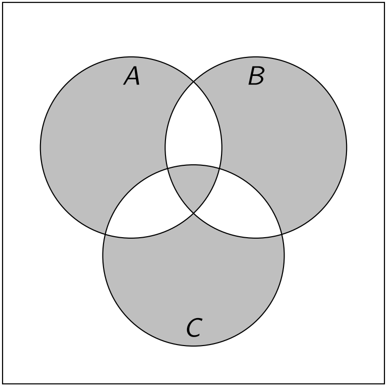
La différence symétrique de deux ensembles A et B, notée $A \Delta B$, est un ensemble contenant les éléments de A qui n'appartiennent pas à B et les éléments de B qui n'appartiennent pas à A. Plus formellement, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Propriétés 10

1. La différence symétrique est associative. Si A, B et C sont des ensembles, alors $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
2. La différence symétrique est commutative. Si A et B sont deux ensembles, alors $A\Delta B = B\Delta A$.
3. L'ensemble vide est l'élément neutre de la différence symétrique. Si A est un ensemble, alors $A\Delta\emptyset = A$.
4. Si A est un ensemble, alors $A\Delta A = \emptyset$.

Les ensembles

Diagramme de Venn, différence symétrique



$A \Delta B \Delta C$

Les ensembles

Le produit cartésien

Définition 18

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples ordonnés (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. On note :

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E \wedge y \in F\}$$

Les couples sont ordonnés $\Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$.

- On peut généraliser en considérant le produit cartésien d'un nombre arbitraire d'ensembles. Soit $E_1, E_2, \ldots E_n$ une collection d'ensembles. Alors le produit cartésien des n ensembles E_i est :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in E_1 \wedge x_2 \in E_2 \wedge \ldots \wedge E_n\}$$

où les $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont des n-uplets (ordonnés).

Les ensembles

Exemple de produit cartésien

- Soit deux ensembles A et B :

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

- Le produit cartésien de A et B est :

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(0,1), (0,3), (0,5) \\ &(1,1), (1,3), (1,5) \\ &(2,1), (2,3), (2,5) \\ &(3,1), (3,3), (3,5) \\ &(4,1), (4,3), (4,5)\} \end{aligned}$$

- A has 5 elements, B has 3 elements and $A \times B$ has $15 = 5 \times 3$ elements.

Définition 19

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments d'un ensemble. On note $\mathrm{Card}(E)$ le cardinal d'un ensemble E. On dit qu'un ensemble est fini si son cardinal est fini.

Théorème 10

Soient E et F deux ensembles finis : $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$.

Définition 20

Tous les sous ensembles d'un ensemble E peuvent être considérés comme les éléments d'un nouvel ensemble que l'on appelle **ensemble des parties** de l'ensemble E, noté $\mathscr{P}(E)$.

Théorème 11

Soit E un ensemble. Le nombre de sous ensemble est donné par :

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)}$$

Les ensembles

Exemple de Partitions

- Soit l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.
- Les sous ensembles sont $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ et $\emptyset$ (n'oublions pas que l'ensemble vide appartient à tout ensemble).
- Nous avons donc :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- On vérifie que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 8 = 2^3$.

Théorème 12

Soient A et B deux ensembles finis, alors

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

- Si l'intersection est vide le cardinal de l'union est la somme des cardinaux.
- On doit retrancher le cardinal de l'intersection, autrement les éléments de l'intersection sont comptés deux fois.
- Il est possible de généraliser cette formule pour un nombre arbitraire d'ensembles finis.

Définition 21

Un ensemble de paires ordonnées de nombres est appelé une relation binaire.

- L'ensemble des premiers nombres d'une relation binaire est l'**ensemble de départ**, ou le **domaine** de la relation.
- L'ensemble des seconds nombres d'une relation binaire est l'**ensemble d'arrivée**.
- Les ensembles suivants sont des relations binaires :

$$A = \{(x, y) | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$$

$$B = \{(x, y) | x \in \mathbb{N} \wedge y = 2x - 1\}$$

On note que dans le premier cas, on peut associer plus d'une valeur y à chaque valeur de x.

Définition 22

Si une relation binaire est telle qu'à chaque élément de l'ensemble de départ est associé **un et un seul élément** de l'ensemble d'arrivée, on dit que la relation binaire est une **fonction**.

- Une fonction est un ensemble de paires ordonnées.
- Toutes les fonctions sont des relations binaires, mais l'inverse n'est pas vrai.
- Dans l'exemple de la page précédente B est une fonction, mais pas l'ensemble A.

- On représente habituellement une fonction par une lettre minuscule. Par exemple f (fonction), ou encore g, ou h, ...

- Si une fonction f associe à chaque élément x de l'ensemble de départ E l'élément y de l'ensemble d'arrivée F, on note :

$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

- On dit que y est l'image de x par la fonction f.

Les fonctions

Exemple

- Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto y = x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

- On peut alors évaluer cette fonction, c'est-à-dire déterminer les images associées à différentes valeurs de x :
  - $f(0) = -2$
  - $f(a) = a^2 + a - 2$ pour tout $a \in \mathbb{R}$
  - $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2 + h$

Les fonctions

Somme, différence, produit et quotient

Soient deux fonctions :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = g(x) \end{array}$$

On définit les opérations suivantes :

Somme $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Différence $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Produit $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Quotient $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(x) \neq 0$

Les fonctions

Composition

Soient deux fonctions :

$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & y = g(x) \end{array}$$

La composition de ces deux fonctions est la fonction $h(x) = (g \circ f)(x)$:

$$g \circ f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & y = g(f(x)) \end{array}$$

En général $g(f(x)) \neq f(g(x))$.

Soient deux fonctions :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x+1) \\ &= (x+1)^2 + (x+1) + 1 \\ &= x^2 + 3x + 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1) + 1 \\ &= x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

Ces deux compositions de f et g sont bien différentes.

Les fonctions

Surjection

Définition 23

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ **surjective** est une fonction telle que tout élément y de l'ensemble d'arrivée F soit l'image d'au moins un élément x de l'ensemble de départ E. Plus formellement une fonction $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Exemple 6

Soient deux ensembles $E = \{x \in [-1, 1]\}$ et $F = y \in [0, 1]$, la fonction $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(x) = |x|$ est surjective. y admet un unique antécédant si $y = 0$ ($x = 0$), dans les autres cas y admet deux antécédants (y et $-y$) dans $[-1, 1]$.

Exemple 7

La fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à x associe $2x$ n'est pas surjective (y impair n'a pas d'antécédant dans $\mathbb{N}$).

Définition 24

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est **injective** si et seulement si deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont deux images par f distinctes, ou de façon équivalente si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exemple 8

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$ est injective. En effet, $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exemple 9

Soient deux ensembles $E = \{x \in [-1, 1]\}$ et $F = y \in [0, 1]$, la fonction $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(x) = |x|$ n'est pas injective. Par exemple $x = 1$ et $x = -1$ ont la même image par f $(y = 1)$.

Définition 25

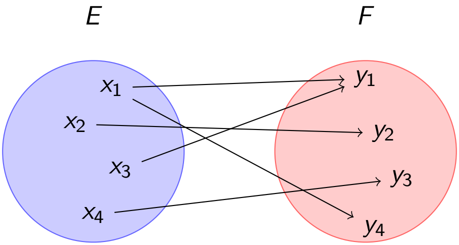
Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective. Dans ce cas chaque élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un unique élément x de l'ensemble de départ.

Exemple 10

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$ est bijective. Nous savons déjà qu'elle est injective, de plus il est évident que pour chaque élément $y \in \mathbb{R}$ on peut trouver un antécédant dans $\mathbb{R}$ $(x = y - 1)$.

Les fonctions

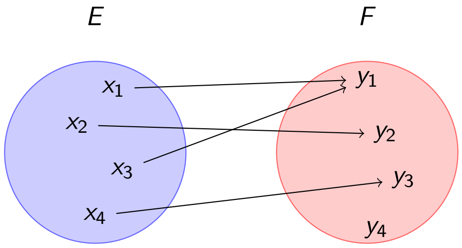
Patates et relation binaire



Ceci n'est pas une fonction, car x_1 a deux images (y_1 et y_4)

Les fonctions

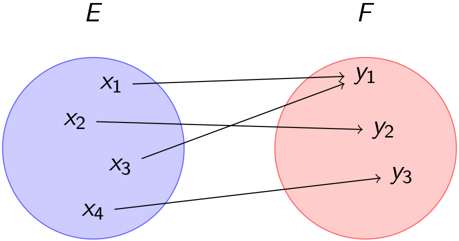
Patates et fonction



Ceci est une fonction, tout élément de E a une unique image dans F

Les fonctions

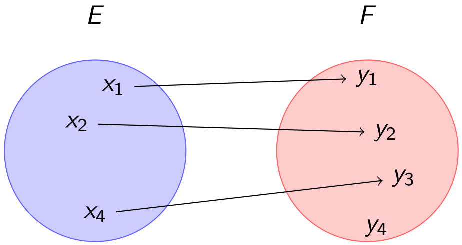
Patates et fonction surjective



Ceci est une surjection, tout élément de F a un antécédant dans E

Les fonctions

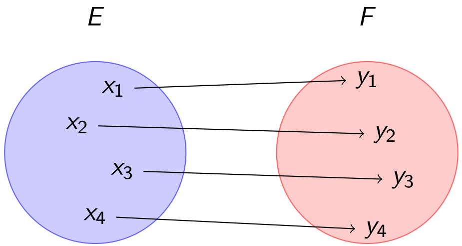
Patates et fonction injective



Ceci est une injection, $f(y_i) = f(y_j) \Rightarrow x_i = x_j$.

Les fonctions

Patates et fonction bijective



Ceci est une bijection. Notons qu'il s'agit du seul cas où on peut imaginer sans équivoque une fonction qui nous amène de F vers E.

Définition 26

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective. Par définition des bijections, tout élément $y \in F$ possède un antécédent et un seul par f. On peut donc définir une application $f^{-1} : F \to E$, qui à $y \in F$ associe son unique antécédent $x \in E$. f^{-1} est la fonction inverse ou réciproque associée à f.

- f^{-1} est aussi une bijection.

Ne pas confondre f^{-1} et $\frac{1}{f}$.

- Si f est une bijection alors $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour tout x.

Exemple 11

Soit $f(x) = 2x + 4$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une bijection. La fonction inverse $f^{-1}(x)$ s'obtient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} y &= 2x + 4 \\ \Leftrightarrow y - 4 &= 2x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{y-4}{2} \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu une expression de x comme une fonction de y, $g(y) = \frac{y-4}{2}$. En inversant x et y, puisqu'il est d'usage de noter x un élément de l'ensemble de départ et y son image, on obtient la fonction inverse $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$. On vérifie facilement que $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$. Par exemple :

$$f(f^{-1}(x)) = 2\left(\frac{x-4}{2}\right) + 4 = x - 4 + 4 = x$$

Les quantificateurs

Définition 27

$\forall$ s'appelle le quantificateur universel et $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.

- La proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » se lit « Pour tous les éléments x de E la proposition $P(x)$ est vraie »
- La proposition « $\exists x \in E | P(x)$ » se lit « Il existe au moins un élément x dans E tel que la proposition $P(x)$ est vraie »
- La proposition « $\exists! x \in E | P(x)$ » se lit « Il existe un et un seul élément x dans E tel que la proposition $P(x)$ est vraie »
- La proposition « $\nexists x \in E | P(x)$ » se lit « Il n'existe pas x dans E tel que la proposition $P(x)$ est vraie », on pourrait aussi écrire « $\forall x \in E | \overline{P(x)}$ »

Les quantificateurs

Propriétés, I

Théorème 13

Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend des éléments x dans E. On a :

1. $\overline{\forall x \in E, P(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in E | \overline{P(x)}$
2. $\overline{\exists x \in E | P(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, \overline{P(x)}$

Théorème 14

Soient E un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dont les valeurs de vérité dépendent des éléments x dans E. On a :

1. $(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$
2. $(\exists x \in E | P(x) \vee Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in E | P(x)) \vee (\exists x \in E | Q(x))$
3. $(\exists x \in E | P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\exists x \in E | P(x)) \wedge (\exists x \in E | Q(x))$
4. $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \quad \Leftarrow \quad (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$

- Pour comprendre pourquoi nous n'avons pas l'équivalence dans le point 3 du théorème 14, il faut noter que s'il est possible de trouver un x tel que $P(x)$ est vraie et un (autre) x tel que $Q(x)$ est vraie, rien n'assure qu'il soit possible de trouver un x tel que les deux propositions $P(x)$ et $Q(x)$ soient simultanément vraies.

- De même pour comprendre l'absence d'équivalence dans point 4 du théorème 14, remarquons que la proposition ≪ dans la classe, tout élève est un garçon ou une fille ≫ est vraie mais que la proposition ≪ dans la classe, tout élève est un garçon ou tout élève est une fille ≫ est fausse (en général).

On peut distribuer $\forall$ sur $\wedge$ et $\exists$ sur $\vee$, **mais** on ne peut pas distribuer $\forall$ sur $\vee$ ou $\exists$ sur $\wedge$.

Les quantificateurs

Propriétés, II

Théorème 15

Soient E et F deux ensembles et $P(x, y)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend des éléments x dans E et y dans F. On a :

1. $(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y))$
2. $(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y))$

- On peut permuter deux quantificateurs universels, ou deux quantificateurs existentiels…Mais

Théorème 16

Soient E et F deux ensembles et $P(x, y)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend des éléments x dans E et y dans F. On a :

$$(\exists x \in E | \forall y \in F, P(x, y)) \quad \Rightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E | P(x, y))$$