Calcul Économique

IV. Dérivées

Stéphane Adjemian

stephane.adjemian@univ-lemans.fr

Septembre 2024

Plan

Variation d'une fonction, I

- Soit f une fonction de E dans F.
- On veut prédire l'effet d'une variation de $x \in E$ sur son image par f.
- Soit $x_0 \in E$, son image par f est $y_0 = f(x_0) \in F$.
- Pertubons x_0 en lui rajoutant Δx. On suppose que la perturbation est « assez petite » pour que : $x_1 = x_0 + \Delta x \in E$.
- On peut donc réécrire $\Delta x = x_1 - x_0$, et définir $y_1 = f(x_0 + \Delta x) \in F$ la conséquence sur l'image par f.
- On pose $\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$ la variation de l'image par f induite par la variation Δx de x.

Variation d'une fonction, II

Exemple 1

Soit $f(x) = x^3$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons comme valeur initiale de x $x_0 = 2$, son image par f est $y_0 = f(x_0) = 8$. Donnons-nous une perturbation $\Delta x = 1$. On a alors $x_1 = x_0 + \Delta x = 3$ et son image $y_1 = 3^3 = 27$. La variation induite de l'image est donc $\Delta f(x) = y_1 - y_0$, soit $\Delta f(x) = 19$. Si nous changeons la perturbation sur x en posant $\Delta x = -1$, nous obtenons $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ et donc $\Delta f(x) = -7$.

Pour ces deux exemples $\Delta f(x)$ et Δx ont le même signe : quand on augmente (diminue) x cela induit une augmentation (baisse) de $f(x)$. Cela suggère que f est croissante autour de $x = 1$. Ce résultat n'est évidemment pas général.

Si maintenant $x_0 = 1$ et $\Delta x = 1$, on a $x_1 = 2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 8$ et donc $\Delta f(x) = 7$. On note que l'amplitude de l'effet sur l'image n'est pas constant (dépend du niveau initial x_0)

Variation d'une fonction, III

Exemple 2

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $f(x) = ax + b$, une droite, où a et b sont des paramètres réels. Si on perturbe x_0 avec Δx, on a :

$$y_1 = a(\underbrace{x_0 + \Delta x}_{x_1}) + b$$

sachant que $y_0 = ax_0 + b$, on a donc :

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= y_1 - y_0 \\ &= a(x_1 - x_0) \\ &= a\Delta x\end{aligned}$$

Si on normalise la variation induite $\Delta f(x)$ par la variation Δ, on obtient :

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Pour une droite, le **taux de variation** ne dépend pas de x_0.

Variation d'une fonction, IV

- Plus généralement :

$$f(x) + \Delta f(x) = f(x + \Delta x)$$

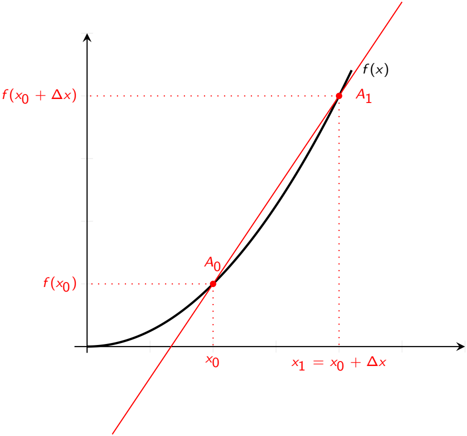
- Soit de façon équivalente :

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- En divisant par $\Delta x \neq 0$, on obtient le taux de variation :

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

qui correspond à la pente de l'arc passant par les points A_0 et A_1 sur le graphique.

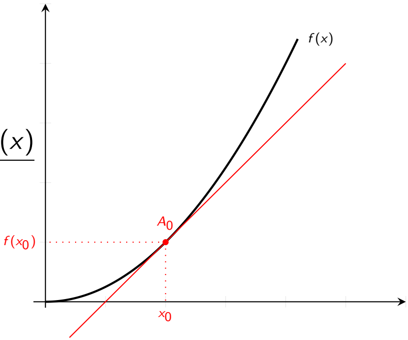


Variation d'une fonction, V

- Quel est le taux de variation pour $\Delta x = 0$? On a une forme indéterminée de type $0/0$.

- Si la limite existe, la dérivée de f en x_0 est la limite du taux de variation quand Δx tend vers 0 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



- On a remplacé Δx par $\mathrm{d}x \to$ variations infinitésimales.

- Si la dérivée en x_0 existe on la notera aussi $f'(x_0)$.

Dérivée en un point, I

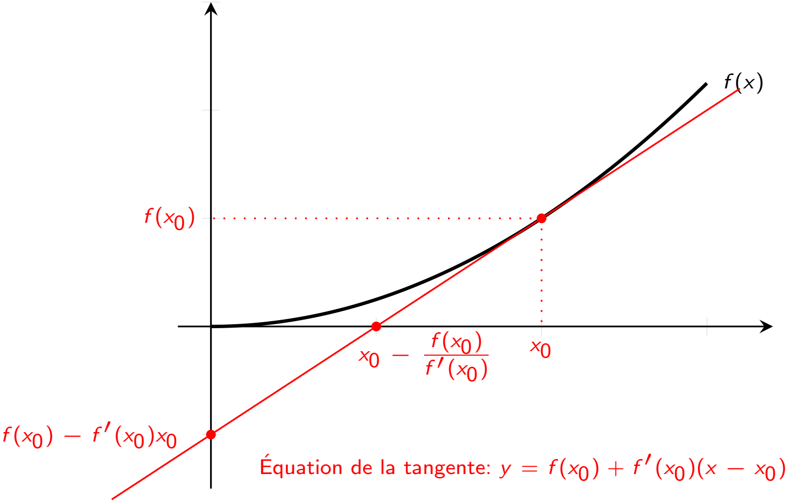
Définition 1

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. On note $f'(x_0)$ la dérivée de f au point $x_0 \in E$, celle-ci est définie par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- La dérivée est définie par une limite.
- Pour que la dérivée existe, il faut que la limite soit définie.
- La dérivée de la fonction f en un point x_0 est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en x_0.

Dérivée en un point, II



Pour déterminer l'équation de la tangente on exploite deux informations :

- La pente de la tangente est $f'(x_0)$,
- La tangente passe par le point $(x_0, f(x_0))$.

L'équation de la tangente est donc de la forme :

$$y = f'(x_0)x + b$$

Il ne reste plus qu'à choisir b pour s'assurer que la tangente passe bien par le point $(x_0, f(x_0))$. On a :

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

soit de façon équivalente :

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

et donc :

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

ou encore en factorisant :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Dérivée en un point, III

- La dérivée est définie par une limite.
- On peut donc définir une dérivée à droite et une dérivée à gauche
- Si les dérivées à droite et à gauche en x_0 sont différentes, on dit que la fonction n'est pas dérivable en x_0 (comme pour l'existence de la limite).

Définition 2

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. On note $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ les dérivées à gauche et à droite de f au point $x_0 \in E$, celle-ci sont définies par :

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

et

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dérivée en un point, IV

Exemple 3

Soit $f(x) = x^2$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. Calculons la dérivée en $x = 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dérivée en un point, V

- Pour qu'une fonction soit dérivable en un point, il faut que la fonction soit définie en ce point.

- Si une fonction n'est pas définie en un point x_0, alors la fonction n'admet pas de dérivée en ce point.

Ce n'est pas parce qu'une fonction est définie en un point que la dérivée en ce point existe.

Théorème 1

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. Si la fonction f est dérivable en $x_0 \in E$, alors la fonction f est continue en x_0.

La réciproque n'est pas vraie (voir l'exemple suivant) : une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

Preuve du théorème 1. Puisque la fonction est supposée dérivable en $x_0 \in E$, nous avons par définition de la dérivée :

$$f'(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Posons :

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Nous avons donc :

$$hg(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

avec $\lim_{h \longrightarrow 0} g(h) = f'(x_0)$. Ainsi :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} hg(h) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) \lim_{h \longrightarrow 0} h = \lim_{h \longrightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{h \longrightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) - f(x_0)$$

d'où finalement :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La fonction est donc bien continue en x_0.

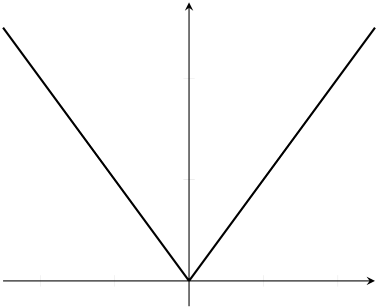
Dérivée en un point, VI

Exemple 4

Soit $f(x) = |x|$ une fonction défine sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Cette fonction est continue en $x = 0$ mais n'est pas dérivable.

- $f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h|-0}{h} = -1$, en effet on a :

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0^-} 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$



- Mais $f'_+(0) = 1$
- Les dérivées à droite et à gauche sont différentes, la fonction n'est donc pas dérivable en $x = 0$.

Dérivée sur un intervalle

Définition 3

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. Si la fonction f est dérivable sur E si ell est dérivable en tout point $x \in E$.

Exemple 5

La fonction $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x + \lim_{h \to 0} h \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Théorème 2

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de E dans F dérivables sur E, alors :

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

Preuve. Notons $\ell(x) = f(x)+g(x)$, nous avons par définition :

$$\begin{aligned}
\ell'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ell(x+h)-\ell(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x) \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Règles de dérivation

Dérivée d'un produit (a)

Théorème 3

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de E dans F dérivables sur E, alors :

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Preuve. Notons $\ell(x) = f(x) \cdot g(x)$, nous avons par définition :

$$\begin{aligned}
\ell'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}
\end{aligned}$$

Règles de dérivation

Dérivée d'un produit (b)

On a donc :

$$\begin{aligned}
\ell'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Règles de dérivation

Dérivée d'un quotient

Théorème 4

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de E dans F dérivables sur E, avec $g(x) \neq 0 \, \forall x \in E$, alors :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Preuve. Notons $\ell(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, nous avons de façon équivalente :

$$\ell(x)g(x) = f(x)$$

en dérivant, et en exploitant la règle de dérivation d'un produit, il vient :

$$\ell'(x)g(x) + \ell(x)g'(x) = f'(x)$$

soit :

$$\ell'(x) = \frac{f'(x) - \ell(x)g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Règles de dérivation

Dérivée d'une composition

Théorème 5

Soient $f(x)$ une fonction dérivable de E dans F et $g(x)$ une fonction dérivable de F dans G, alors :

$$g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$$

Exemple 6

Soit $f(x)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable. Alors $g(x) = f(x)^2$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)$$

Preuve du théorème 6. Commençons par noter que, par définition de la dérivée, si les fonctions f et g sont dérivables, alors on peut écrire :

$$f(x+h) =_0 f(x) + hf'(x) + \varepsilon(h)$$

et

$$g(y+k) =_0 g(y) + kg'(y) + \nu(k)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\lim_{k\to 0} \nu(k) = 0$. Il s'agit d'un développement limité à l'ordre 1 des fonctions f et g. La première équation nous dit que pour de petites valeurs de h on peut approximer $f(x+h)$ par $f(x) + hf'(x)$, l'équation de la tangente à f au point x, l'erreur d'approximation $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. On a donc :

$$g \circ f(x+h) = g\Big(\underbrace{f(x)}_{y} + \underbrace{hf'(x) + \varepsilon(h)}_{k(h)}\Big)$$

avec $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. En exploitant le dévelopement limité de g, on obtient :

$$g \circ f(x+h) = g(f(x)) + \Big(hf'(x) + \varepsilon(h)\Big)g'(f(x)) + \nu\Big(hf'(x) + \varepsilon(h)\Big)$$

$$\Leftrightarrow g \circ f(x+h) = g(f(x)) + hg'(f(x))f'(x) + \underbrace{\nu\Big(hf'(x) + \varepsilon(h)\Big) + \varepsilon(h)g'(f(x))}_{\eta(h)}$$

avec $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$. On a donc :

$$g \circ f(x+h) = g(f(x)) + hg'(f(x))f'(x) + \eta(h)$$

et par identification :

$$g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$$

Règles de dérivation

Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 6

Soit f une fonction dérivable et bijective de E dans F, alors f^{-1} est dérivable en tout point $x \in F$ tel que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Preuve. Nous savons déjà que la composition d'une fonction et de sa réciproque (celle-ci existe car la fonction f est supposée bijective) est égale à la fonction identité :

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

en dérivant les deux membres et utilisant le théorème 6 sur la dérivation des fonctions composées, nous avons :

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)(f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Fonctions exponentielle et logarithme, I

Définition 4

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Proposition 1

La fonction exponentielle vérifie $e^{x+y} = e^x e^y$.

Proposition 2

On peut écrire l'exponentielle sous la forme : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Théorème 7

La fonction exponentielle est identique à sa dérivée : $(e^x)' = e^x$.

Preuve de la proposition 1. Par définition de l'exponentielle, on a :

$$e^x e^y = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}_{u_n}$$

et

$$e^{x+y} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}_{v_n}$$

Montrons que $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, et donc que $e^{x+y} = e^x e^y$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{v_n} &= \left[\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)}\right]^n \\
&= \left[1+\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)-\left(1+\frac{x+y}{n}\right)}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)}\right]^n \\
&= \left[1+\underbrace{\frac{xy}{n^2+n(x+y)}}_{\frac{w_n}{n}}\right]^n
\end{aligned}$$

On note que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_n}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} w_n = 0$$

Ainsi :

$$\frac{u_n}{v_n} = \left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n \sim_\infty e^{w_n}$$

et donc :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} e^{w_n} = e^0 = 1$$

Les suites u_n et v_n ont le même comportement asymptotique et donc $e^{x+y} = e^x e^y$. C.Q.F.D.

Preuve de la proposition 2. Par la formule du binôme de Newton, on a :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

avec le coeffricient binomiale :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k(n-k)!} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{n^k} \frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

Au numérateur de la première fraction sous la somme nous avons k facteurs, ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{n^k} = 1$$

pour tout k. Nous avons donc :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{n^k(n-k)!}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Preuve du théorème 7. En utilisant l'expression de l'exponentielle sous la forme d'une série entière, on a :

$$
\begin{aligned}
\left(e^x\right)' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x
\end{aligned}
$$

C.Q.F.D.

Fonctions exponentielle et logarithme, II

Théorème 8

La dérivée de $f(x) = log(x)$*, pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *est* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 3

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$, alors :

$$\Big(\log f(x)\Big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Preuve du théorème 8. On sait que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction expolnentielle, on a donc :

$$e^{\log x} = x$$

En dérivant :

$$\left(e^{\log x}\right)' = 1$$

Pour dériver le l'exponentielle d'une fonction, on utilise le théorème 6 de dérivation des fonctions composées. De façon générale, on a donc si $f(x)$ est une fonction dérivable :

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$$

puisque par définition la dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Dans le cas qui nous intéresse, il vient :

$$\left(\log x\right)' e^{\log x} = 1$$

et donc :

$$x\left(\log x\right)' = 1$$

d'où :

$$\left(\log x\right)' = \frac{1}{x}$$

Preuve du théorème 3. direct avec le théorème 6.

Fonctions exponentielle et logarithme, III

Corollaire 1

Si $f(x)$ est une fonction positive, alors :

$$f'(x) = f(x)\Big(\log f(x)\Big)'$$

Exemple 7

Soit la fonction $f(x) = x^x$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^x\Big(\log x^x\Big)' \\ &= x^x\Big(x\log x\Big)' \\ &= x^x\left(\frac{x}{x} + \log x\right) \\ &= x^x\Big(1 + \log x\Big) \end{aligned}$$

Dérivées des fonctions usuelles

D_f	$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$	Remarques
$\mathbb{R}$	k	$\mathbb{R}$	0	$k \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	kx	$\mathbb{R}$	k	$k \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^\star$	$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^\star$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}_+^\star$	x^α	$\mathbb{R}_+^\star$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^\star$	$\log \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^\star$	$\frac{1}{x}$	
$\mathbb{R}^\star$	$\log_a \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^\star$	$\frac{1}{x \log a}$	$a > 0$ et $a \neq 1$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$ e^x		
$\mathbb{R}$	a^x	$\mathbb{R}$	$a^x \log a$	$a > 0$

Fonction puissance : x^n, avec $n \in \mathbb{N}$

- Montrons que $(x^n)' = nx^{n-1}$ par récurrence.
- Au rang 1, nous avons $x' = 1 \times x^0 = 1$.
- Supposons que $(x^n)' = nx^{n-1}$ et montrons que l'on doit alors avoir $\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n$:

$$\begin{aligned}
\left(x^{n+1}\right)' &= \left(x^{n+1}\right)' \\
&= (xx^n)' \\
&= x^n + xnx^{n-1} \\
&= x^n + nx^n = (n+1)x^n \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Dérivées d'ordre supérieur

Définition 5

Soit f une fonction dérivable sur E, et telle que f' est elle-même dérivable sur E, alors la dérivée de f' est appelée **dérivée seconde** de la fonction f, et notée f''. On note de même f''' la dérivée tierce de f si elle existe, plus généralement on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de la fonction f.

- Par convention $f^{(0)} = f$.
- Par construction $\left(f^{(k)}\right)' = f^{(k+1)}$.

Définition 6

Soit f une fonction de $E \to F \subseteq \mathbb{R}$. Si f est k fois dérivable sur E, et sa dérivée k-ième est continue sur E, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur E. Par convention, si f est continue sur E on dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur E ; si jamais f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur E pour tout entier k alors on dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Dérivées d'ordre supérieur

Règles de dérivation

Théorème 9

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle E, alors :

1. *αf est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E et $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$*
2. *$f + g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$*

Corollaire 2

La dérivée n-ième d'une fonction polynomiale de degré inférieur à n est nulle.

Dérivées d'ordre supérieur

Fonctions usuelles

On peut établir les formules suivantes par récurrence :

$f(x)$	$D_{f^{(n)}}$	$f^{(n)}(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$x^p,\ p \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} \frac{p!}{(n-p)!} x^{b-n} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x^{\alpha-n} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i)$
$\frac{1}{a+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-a\}$	$\frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$
$\frac{1}{a-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	$\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

Théorème 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle E, alors la fonction $f \cdot g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E et :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Rappels. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ce coefficient est aussi utilisé en combinatoire pour dénombrer le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets distincts et que l'ordre dans lesquel les objets sont énumérés n'a pas d'importance. On peut montrer que : $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, et

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Preuve du théorème 10. On utilise une preuve par récurrence. Pour $n = 0$, on a :

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(0)} &= \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \\ &= \binom{0}{0} f^{(0)} \cdot g^{(0)} = f \cdot g\end{aligned}$$

et on sait que le produit de deux fonctions continues est une fonction continue. Nous pourrions nous arrêter là est vérifier que si le théorème est vrai au rang n alors il est vrai au rang $n+1$, mais vérifions tout de même que le théorème 10 nous permet bien de retrouver le résultat connu pour la dérivée d'ordre 1. Nous avons :

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(1)} &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} \cdot g^{(1-k)} \\ &= \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} \\ &= f' g + f g'\end{aligned}$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ alors $f'g + fg'$ est une fonction continue (somme et produits de fonctions continues). Montrons que le théorème est vrai au rang $n+1$, c'est-à-dire que si f et g sont de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ alors $f \cdot g$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et :

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)^{(n+1)} &= \left((f\cdot g)^{(n)}\right)' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}\cdot g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{0}f\cdot g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n}f^{(n+1)}\cdot g \\
&= f\cdot g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}\cdot g \\
&= \binom{n+1}{0}f\cdot g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}\cdot g \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} \qquad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Théorème 11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle E, alors la fonction $f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E et :

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\sum_{i=1}^{n} i m_i = n} \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_n!} f^{(m_1+m_2+\cdots+m_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{m_j}$$

Exemple 8

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur un E, alors :

$$\begin{aligned} (f \circ g)''(x) &= \Big(f'(g(x)) g'(x) \Big)' \\ &= f''(g(x)) g'(x) g'(x) + f'(g(x)) g''(x) \\ &= f''(g(x)) g'(x)^2 + f'(g(x)) g''(x) \end{aligned}$$

Extrema, I

Définition 7

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $a \in E$ est un :

maximum de f sur E si pour tout $x \in E$ on a $f(x) \leq f(a)$,

minimum de f sur E si pour tout $x \in E$ on a $f(x) \geq f(a)$.

On dira que a est un **extremum** de f sur E si a est un maximum ou minimum de f sur E.

Définition 8

Soient E un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ et $a \in E$. On dit que a ets un :

maximum local de f sur E s'il existe $\delta > 0$ pour tout $x \in E$ on ait
$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a),$$

minimum local de f sur E s'il existe $\delta > 0$ pour tout $x \in E$ on ait
$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

Extrema, II

Théorème 12

Soit E un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et a un extremum local de f. Si f est dérivable en a alors on doit avoir $f'(a) = 0$.

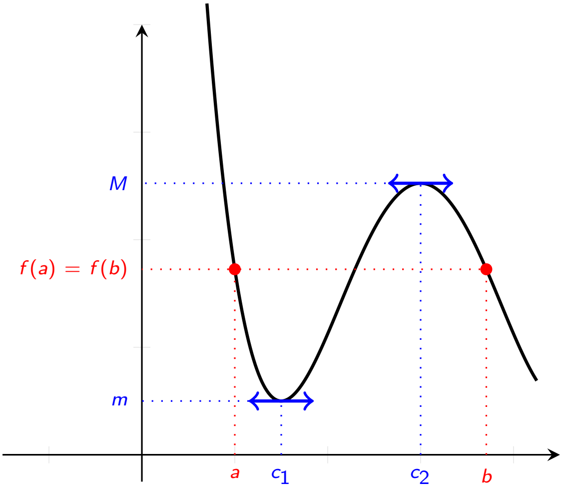
Le théorème 12 ne donne qu'une condition nécessaire. Ce n'est pas parce que la dérivée d'une fonction est nulle en un point qu'elle admet un extremum en ce point. Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet une dérivée nulle en 0 mais pas d'extremum local (en 0 ou ailleurs).

Théorème 13 (Théorème de Rolle)

Soit $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivablesur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Extrema, II

Illustration du théorème de Rolle



Preuve du théorème 12. Supposons que a soit tel que $f'(a) > 0$. Comme $f'(a)$ est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a, celui-ci doit être positif pour x assez proche de a, c'est-à-dire :

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, |x-a| \leq \delta \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$

Ainsi pour tout x tel que $0 < x-a \leq \delta$ on a $f(x) > f(a)$ et pour tout x tel que $-\delta \leq x-a < 0$ on a $f(x) < f(a)$, donc a n'est pas un extremum local (car ni maximum ni minimum). On peut suivre le même argument si $f'(a) < 0$.

Preuve du théorème 13. Si f est une fonction constante sur $[a, b]$, alors la dérivée de la fonction est nulle sur $]a, b[$ et le théorème est évidemment vérifié. Intéressons nous au cas où la fonction n'est pas constante. On sait alors, puisque f est continue et par le théorème 13 du chapitre III, que la fonction admet un maximum M et un minimum m sur $[a, b]$ et que l'un des deux doit être différent de $f(a)$ [1] (puisque la fonction n'est pas constante). Supposons que $M > f(a)$ et posons $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Alors $f(c)$ est le maximum de f sur $]a, b[$: c est un maximum local de f, et donc $f'(c) = 0$ par le théorème 12.

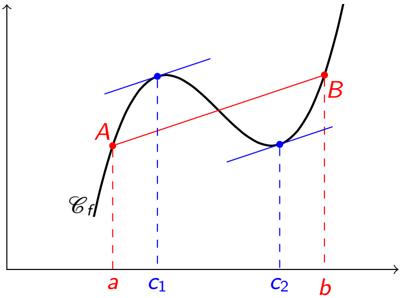
1. Notons que si M ou m sont différents de $f(a)$ alors ils sont aussi différents de $f(b)$, puisque par hypothèse $f(a) = f(b)$.

Accroissements finis

Théorème 14

Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la corde entre les points A et B.
- $f'(c)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en un point c.
- Le théorème nous dit qu'il existe au moins un point c où la tangente à la courbe est parallèle à la corde.



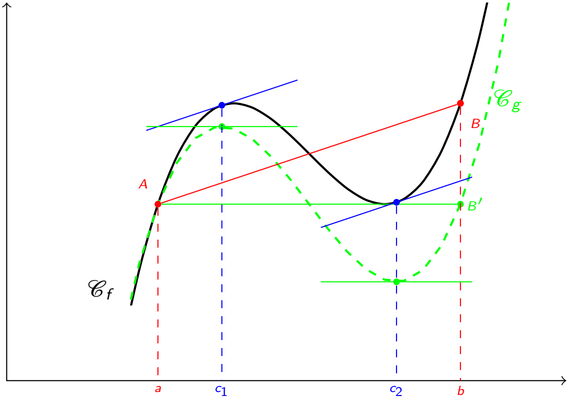
Preuve du théorème 14. Posons la fonction g définie sur le même intervalle que f à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Par construction, g est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. La fonction g est la différence de la fonction f et d'une droite parallèle à la corde entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ passant par le point $(a, 0)$ sur l'axe des abscisses. On note que la fonction g vérifie $g(a) = g(b) = f(a)$, il s'agit en fait d'une rotation de la fonction d'origine f qui nous permet d'utiliser le théorème de Rolle (dans l'illustration graphique ci-dessous, on passe de la courbe en trait plein à la courbe en tirets verts). En effet par le théorème 13 on sait qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$g'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$



Sens de variation

Théorème 15

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est croissante sur E si et seulement si, on a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, et f est décroissante sur E si et seulement si on a $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$. De plus, si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in E$ alors f est strictement croissante, et si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in E$ alors f est strictement décroissante.

- Ce théorème (voir la preuve) est une conséquence direct du théorème 14, dit des accroissements finis.
- Si la dérivée est nulle pour tout $x \in E$ alors la fonction est constante (simultanément croissante et décroissante).
- C'est ce théorème qui nous permet de construire des tableaux de variation pour décrire les fonctions.

Preuve du théorème 15. Si f est croissante sur E alors pour tout $(x, y) \in E^2$ avec $y \neq x$ le signe de $f(y) - f(x)$ doit être identique au signe de $y - x$ (de sorte que $f(y) > f(x)$ si et seulement si $y > x$). Ainsi la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

doit être positive ou nulle puisque le taux de variation sous la limite est positif. Pour la réciproque, si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, alors considérons $(x, y) \in E^2$ avec $y \neq x$. Par le théorème 14 on sait qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

ainsi le signe de $f(y) \geq f(x)$ si $y > x$ et $f(y) \leq f(x)$ si $y < x$, puisque $f'(c) \geq 0$, f est donc une fonction croissante. Si la fonction est strictement positive alors la fonction est strictement croissante, c'est-à-dire : $f(y) > f(x)$ si $y > x$ et $f(y) < f(x)$ si $y < x$.

Inégalité des accroissements finis

Théorème 16

Soient $a < b$ *deux réels, et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. Si* $\sup_{c \in]a,b[} |f'(c)| < \infty$*, alors pour tout* $(x, y) \in [a, b]^2$ *on a :*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

- Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f' est une fonction continue et donc bornée. Ainsi le théorème 16 s'applique à toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
- Sous les conditions du théorème 16, la fonction f est k-lipschitzienne.
- Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est k-lipschitzienne.

preuve du théorème 16. Direct par le théorème 14. Soit $(x, y) \in [a, b]^2$, sans perte de généralité on suppose que $y > x$. On peut appliquer l'égalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x, y]$, on sait qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Soit, en prenant la valeur absolue, $|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x|$. Puisque la dérivée est finie on sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ fini tel que $|f(x) - f(y)| <= k|x - y|$. C.Q.F.D.

Extrema, III

- Le théorème 12 donne une condition pour un extremum local, mais (i) cette condition est seulement nécessaire, et (ii) celle-ci suppose que la fonction est dérivable en l'extremum...

- En admettant que la fonction soit dérivable en l'extremum, pour que cette condition permette efectivement d'identifier un extremum local il faut qu'on ait un changement de signe de la dérivée autour de l'extremum :

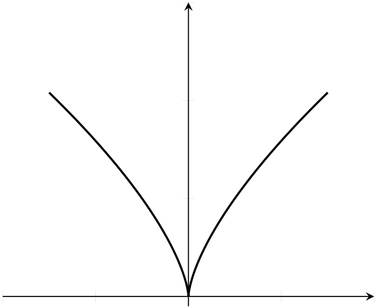
  - Pour que a soit un maximum local de f, si f est dérivable en a, il faut et il suffit que $f'(a) = 0$, $\exists \delta_- > 0$ tel que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [a - \delta_-, a[$ et $\exists \delta_+ > 0$ tel que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, a - \delta_+]$.

  - Pour que a soit un minimum local de f, si f est dérivable en a, il faut et il suffit que $f'(a) = 0$, $\exists \delta_- > 0$ tel que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [a - \delta_-, a[$ et $\exists \delta_+ > 0$ tel que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, a - \delta_+]$.

Extrema, IV

Exemple avec une fonction non dérivable en l'extremum

- $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
- $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
- f' a une discontinuité (infinie) en $x = 0\dots$
- La fonction admet un minimum global en 0, pourtant la dérivée en 0 n'est pas définie.
- Même si $f'(0) \neq 0$, on a bien le changement de signe de la dérivée autour de l'extremum.



Extrema, V

Comment identifier les extrema d'une fonction ?

Il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. Calculer la dérivée première $f'(x)$.

2. Identifier les valeurs de x pour lesquelles f' est nulle.

3. Identifier les valeurs de x pour lesquelles f' est discontinue.

4. Pour chaque valeur a identifiée en 2.a et 2.b, déterminer si f' change de signe autour de a :

   - f' passe du signe $-$ à $+$: minimum local,
   - f' passe du signe $+$ à $-$: maximum local,

Ensuite il ne reste qu'à évaluer la fonction f sur les extrema identifiés.

Extrema, VI

Exemple (a)

- Soit la fonction $f(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}$. On cherche les extrema de cette fonction.

- Calculons la dérivée de la fonction :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{2}{3}}(2-x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{1}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{1}{3}}(2-x)^{-\frac{2}{3}}\Big(-(1+x)+2(2-x)\Big) \\ &= \frac{1-x}{(1+x)^{\frac{1}{3}}(2-x)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

- La dérivée f' est nulle lorsque $x = 1$.

- La dérivée f' est discontinue en $x = -1$ et $x = 2$ car le dénominateur est alors nul. Il s'agit de discontinuités infinies, nous avons :

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = -\infty$$

Extrema, VI

Exemple (b)

- Déterminons les changements de signe de la dérivée f' en $x = -1$, $x = 1$ et $x = 2$:

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x < -1 \\ f'(x) > 0 & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ minimum local en } x = -1$$

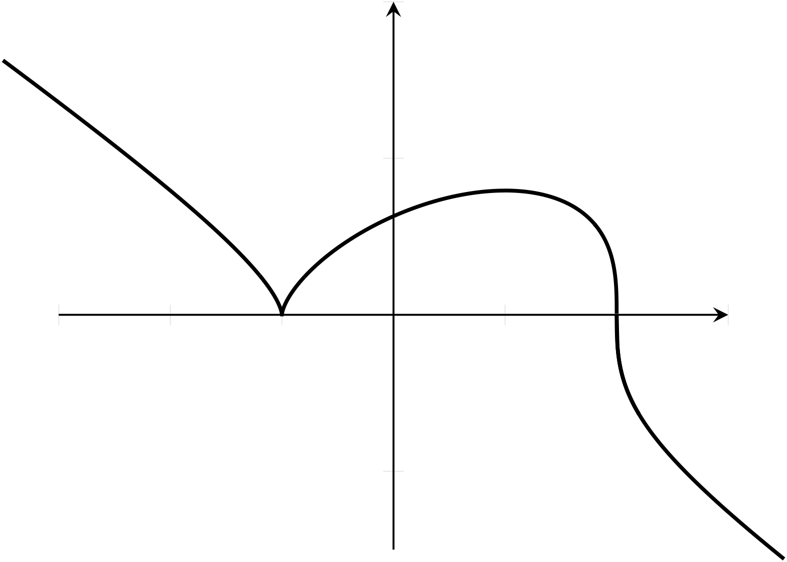
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ f'(x) < 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ maximum local en } x = 1$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } 1 < x < 2 \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ pas d'extremum en } x = 2$$

- $f(-1) = f(2) = 0$ et $f(1) = \sqrt[3]{4}$.

Extrema, VI

Exemple (c)



Fonctions convexes et concaves

Définitions

Une fonction f est convexe (concave) si et seulement si les cordes sont au dessus (dessous) de la courbe représentative de f.

Définition 9

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe sur E si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}_{\text{un point sur la corde}}$$

On parle de convexité stricte si l'inégalité est stricte.

Définition 10

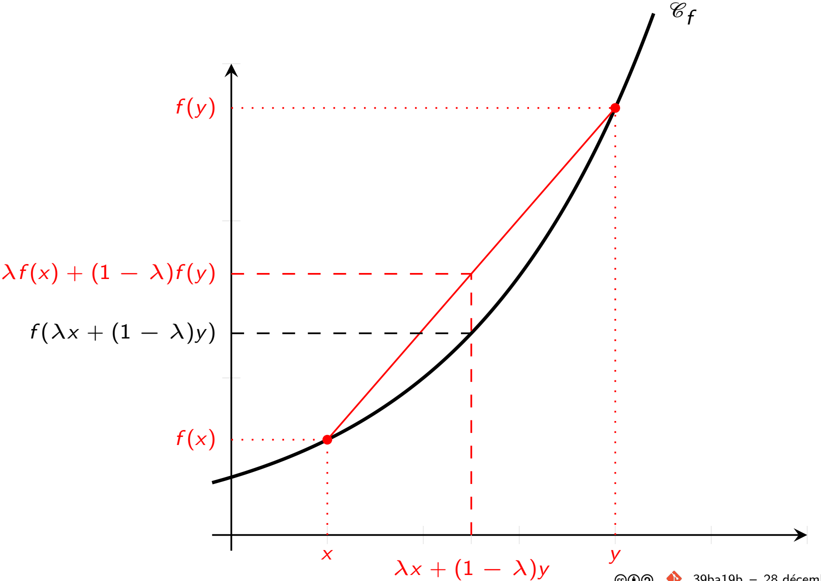
Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est concave sur E si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On parle de concavité stricte si l'inégalité est stricte.

Fonctions convexes et concaves

Illustration graphique



Théorème 17

Soit une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ *convexe sur* E*, alors* $\forall (a, c, b) \in E^3$ *tels que* $a < c < b$ *on a :*

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

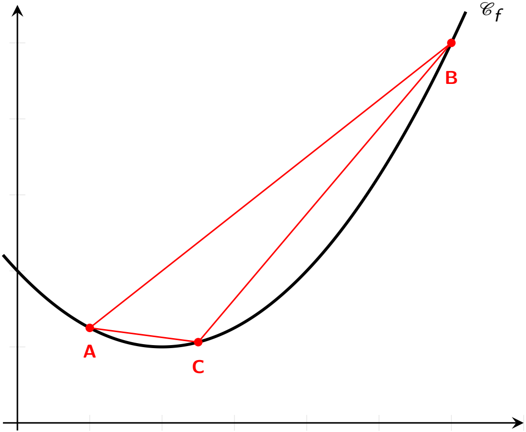
et donc :

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

Réciproquement si l'une des trois inégalités est vérifiée $\forall (a, b, c) \in E^3$ *tels que* $a < c < b$ *alors* f *est convexe sur* E.

Fonctions convexes et concaves

Inégalité des pentes (b)



$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction convexe. La pente entre A et C est inférieure à la pente entre A et B qui est inférieure à la pente entre C et B.

preuve du théorème 17. $\forall(a, b, c) \in E^3$ tels que $a < c < b$ chacune de ces trois inégalités peut se réécrire de façon équivalente :

$$f(c) \leq \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b)$$

Elles sont donc équivalentes. Posons $\lambda = \frac{b-c}{b-a}$, on a :

$$1 - \lambda = \frac{b-a-b+c}{b-a} = \frac{c-a}{b-a}$$

On note que $\lambda \in]0, 1[$ puisque c est strictement compris entre a et b et que :

$$\lambda a + (1-\lambda)b = \frac{(b-c)a + (c-a)b}{b-a} = \frac{c(b-a)}{b-a} = c$$

Ainsi, nous avons :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

et donc la fonction f est convexe.

Théorème 18

Soit une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $a \in E$ on peut définir la fonction « pente » :

$$\begin{aligned} \Delta_a : E \setminus \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

Alors les assertions suivantes son équivalentes :

(i) f *est convexe sur* E,

(ii) $\forall a \in E$, Δ_a *est une fonction croissante sur* $\{x \in E | x > a\}$,

(iii) $\forall a \in E$, Δ_a *est une fonction croissante sur* $\{x \in E | x < a\}$,

(iv) $\forall a \in E$, Δ_a *est une fonction croissante sur* $E \setminus \{a\}$.

Fonctions convexes et concaves

Dérivées (a)

- Les théorèmes 17 et 18 permettent de montrer qu'une fonction f convexe possède des dérivées à droite et à gauche en tout point à l'intérieur de E et donc assure la continuité de la fonction à l'intérieur de E.

- En calculant les pentes sur des intervalles de plus en plus petit...On en déduit à la limite une condition sur le sens de variation de la dérivée.

Théorème 19

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si la dérivée f' est une fonction croissante (en supposant que la dérivée première existe), c'est-à-dire si et seulement si la dérivée seconde est $f''(x) > 0 \, \forall x \in E$ (en supposant que la dérivée seconde existe).

Fonctions convexes et concaves

Dérivées (b)

- f est concave si et seulement si $-f$ est convexe (voir les définitions 9 et 10)
- On peut reprendre le théorèmes 17 et 18 en inversant les inégalités pour les fonctions concaves.
- Si f est deux fois dérivable sur E alors elle est concave sur E si et seulement si sa dérivée seconde est négative sur E.

Fonctions convexes et concaves

Extrema (a)

- Pour qu'un extremum local x_0 de f soit un maximum local, il faut que, dans un voisinage de x_0 la fonction f soit croissante puis décroissante à partir de x_0.

- Si la dérivée f' existe dans un voisinage de x_0, pour qu'un extremum local x_0 de f soit un maximum local, il faut que, dans un voisinage de x_0 la dérivée f' soit positive puis négative à partir de x_0 (la dérivée décroît).

- Si la dérivée seconde f'' existe dans un voisinage de x_0, pour qu'un extremum local x_0 de f soit un maximum local, il faut que, dans un voisinage de x_0 la dérivée f'' soit négative

Fonctions convexes et concaves

Extrema (b)

Théorème 20

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ telle que les dérivées f' et f'' soient continues en $x_0 \in E$. Alors :

(i) $f'(x_0) = 0$ *et* $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ *maximum local en* x_0*,*

(ii) $f'(x_0) = 0$ *et* $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ *minimum local en* x_0*.*

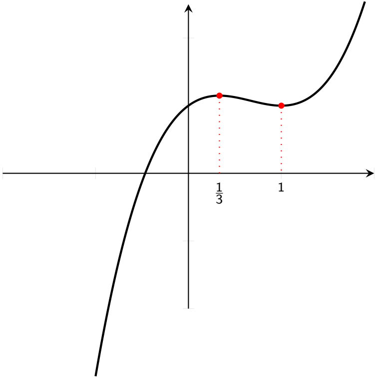
- Si la fonction est concave (convexe) sur E, alors $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ est un maximum (minimum) global sur E.

- Si la dérivée seconde est nulle, il faut aller chercher des dérivées d'ordre supérieur pour conclure. Si les dérivées $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n-1)}(x_0)$ sont nulles et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, alors quand n est impair il n'y a pas d'extremum en x_0 et quand n est pair :
  - $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ minimum local en x_0,
  - $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ maximum local en x_0.

Fonctions convexes et concaves

Exemple

- Soit la fonction polynomiale $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.
- On a : $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et $f''(x) = 6x - 4$.
- La dérivée première est nulle en $x = 1$ et $x = \frac{1}{3}$
- La dérivée seconde est positive ssi $x > \frac{2}{3}$
- La fonction f est concave sur $]-\infty, \frac{2}{3}]$ et convexe sur $[\frac{2}{3}, \infty[$
- On a un maximum local en $x = \frac{1}{3}$ et minimum local en $x = 1$.



Fonctions convexes et concaves

Point d'inflexion (a)

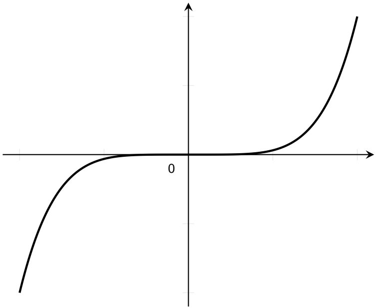
- Dans l'exemple, la fonction est concave puis convexe au delà de $x = \frac{2}{3}$.
- Un point où la courbure d'une fonction change (concavité/convexité) est appelé un point d'infléxion.
- Si la fonction $f \in \mathscr{C}^2$, alors on trouve les points d'inflexions en (i) identifiant les points $\bar{x}$ tels que $f''(\bar{x}) = 0$, (ii) vérifiant si f'' change de signe en $\bar{x}$.

Si la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$, il faut aussi s'intéresser aux points $\tilde{x}$ où f'' est discontinue et vérifier s'il y a un changement de signe de f'' autour de ces points.

Exemple 9

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $f(x) = x^5$

- On a $f'(x) = 5x^4 > 0$.
- La fonction f est donc croissante.
- On a aussi $f''(x) = 20x^3$.
- $f''(x) = 0$ ssi $x = 0$, et $f''(x) < 0$ ssi $x < 0$.
- On a donc un point d'inflexion en 0.



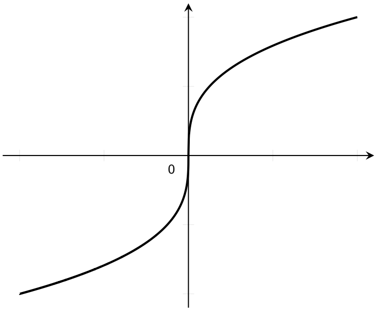
Fonctions convexes et concaves

Point d'inflexion (c)

Exemple 10

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- On a $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} > 0$.
- La fonction f est donc croissante.
- On a aussi $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
- La dérivée seconde (comme la dérivée première) n'est pas définie en zéro.
- Comme $f''(x) > 0$ ssi $x < 0$, on a un point d'inflexion en 0.



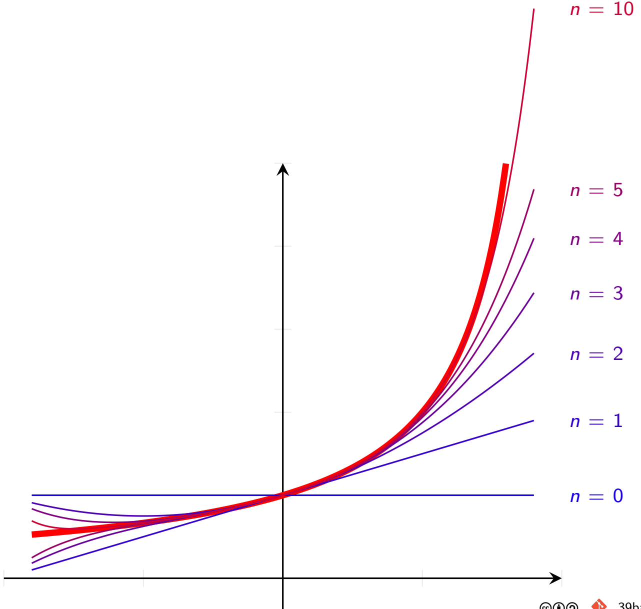
Approximation polynomiale en un point

Le problème

- On peut appliquer le calcul des dérivées pour approximer une fonction en un point.
- Supposons que nous souhaitions approximer une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ dans un voisinage d'un point $x_0 \in E$ à l'aide d'une fonction polynomiale $p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$
- En exploitant seulement des informations sur la fonction f au point x_0 : $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$ (par exemple parce qu'il est trop coûteux d'évaluer la fonction f en un autre point).
- On cherche la fonction polynomiale, c'est-à-dire les paramètres $(\alpha_i)_{i=1}^n$, la plus proche possible de la fonction f (dans un voisinage de x_0).
- Le degré du polynôme n est l'ordre d'appoximation.

Approximation polynomiale en un point

Approximation de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de 0



Approximation polynomiale en un point

Approximation d'ordre 0

- On veut approximer $f(x)$ dans un voisinag !e de x_0 par la fonction polynomiale $p_0(x) = \alpha_0$, une constante.

- Nous n'avons qu'un paramètre à déterminer (α_0).

- Étant donnée l'information disponible (les propriétés de f en x_0) on obtient la meilleure approximation possible en s'assurant qu'en x_0 les niveaux de $p_0(x)$ et $f(x)$ sont identiques.

- On pose $\alpha_0 = f(x_0)$, de sorte que notre approximation de $f(x)$ est :

$$p_0(x) = f(x_0)$$

- Il y a de fortes chances pour que cette approximation ne soit pas très bonne, sauf si le niveau de f est peu variable (ou mieux si f est constante auquel cas il n'y a pas d'erreur d'appoximation).

Approximation polynomiale en un point

Approximation d'ordre 1

- On veut approximer $f(x)$ dans un voisinage de x_0 par la fonction polynomiale $p_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, une droite.

- Nous avons deux paramètres à déterminer (α_0 et α_1).

- Étant donnée l'information disponible (les propriétés de f en x_0) on obtient la meilleure approximation possible en s'assurant qu'en x_0 les pentes de $p_0(x)$ et $f(x)$ sont identiques.

- On veut que $p_1(x)$ soit tel que $p_1(x_0) = f(x_0)$ et $p_1'(x_0) = f'(x_0)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 & = f(x_0) \\ \alpha_1 & = f'(x_0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_0 & = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \\ \alpha_1 & = f'(x_0) \end{cases}$$

- La fonction f est donc approximée par :

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Approximation polynomiale en un point

Approximation d'ordre 2

- On veut approximer $f(x)$ dans un voisinage de x_0 par la fonction polynomiale $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, une parabole.

- Les trois paramètres α_0, α_1 et α_2 sont identifiés en égalisant les dérivées d'ordre 0, 1 et 2 de f et p_2 en x_0.

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 & = f(x_0) \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 x_0 & = f'(x_0) \\ 2\alpha_2 & = f''(x_0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_0 & = f(x_0) - f'(x_0)x_0 - \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 \\ \alpha_1 & = f'(x_0) - f''(x_0)x_0 \\ \alpha_2 & = \frac{1}{2}f''(x_0) \end{cases}$$

- La fonction f est donc approximée par :

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

- On note que le coefficient associé à $(x - x_0)$ n'a pas changé entre les approximations à l'ordre 1 et 2 (de même pour la constante).

Approximation polynomiale en un point

Approximation d'ordre 3

- On veut approximer $f(x)$ dans un voisinage de x_0 par la fonction polynomiale $p_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$.

- Les quatre paramètres α_0, α_1, α_2 et α_3 sont identifiés en égalisant les dérivées d'ordre 0, 1, 2 et 3 de f et p_3 en x_0.

- On peut montrer que f doit être approximée par :

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

- À nouveau, on note que le coefficient associé à $(x - x_0)$ est identique avec les approximations à l'ordre 1, 2 et 3, ou que le coefficient associé à $(x - x_0)^2$ est identique pour les approximations aux ordres 2 et 3.

En identifiant les dérivées de f et de p_3 on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \alpha_3 x_0^3 & = f(x_0) \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 x_0 + 3\alpha_3 x_0^2 & = f'(x_0) \\ 2\alpha_2 + 6\alpha_3 x_0 & = f''(x_0) \\ 6\alpha_3 & = f'''(x_0) \end{cases}$$

On peut résoudre ce système en remontant par le bas. Avec la dernière équation on obtient directement $\alpha_3 = \frac{1}{3\cdot 2} f'''(x_0)$. En substituant dans la troisième équation il vient $\alpha_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) - \frac{1}{2} f'''(x_0) x_0$. Par substitution dans la deuxième équation on obtient :

$$\alpha_1 = f'(x_0) - f''(x_0)x_0 + \frac{1}{2} f'''(x_0)x_0^2$$

Et finalement, en substituant le tout dans la première équation :

$$\alpha_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2} f''(x_0)x_0^2 - \frac{1}{6} f'''(x_0)x_0^3$$

Le polynôme de degré trois est donc :

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x^2 - 2x_0 x + x_0^2) + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x^3 - 3x_0 x^2 + 3x_0^2 x - x_0^3)$$

d'où le résultât annoncé en reconnaissant les identités remarquables.

Approximation polynomiale en un point

Approximation d'ordre n

- On veut approximer $f(x)$ dans un voisinage de x_0 par la fonction polynomiale $p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$.

- Les $n+1$ paramètres α_0, α_1, α_2, $\ldots\alpha_n$ sont identifiés en égalisant les dérivées d'ordre 0 à n de f et p_n en x_0.

- On peut montrer que f peut alors être approximée par :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

Il ne faut pas oublier que si $x \neq x_0$ alors $f(x) \neq p_n(x)$... Il ne s'agit que d'une approximation.

Postulons que la fonction polynomiale utilisée pour approximer la fonction f a la forme suivante :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i (x - x_0)^i$$

Les dérivées de cette fonction sont :

$$p'_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i i (x - x_0)^{i-1}$$

$$p''_n(x) = \sum_{i=2}^{n} c_i i (i-1)(x - x_0)^{i-2}$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(j)}(x) = \sum_{i=j}^{n} c_i i (i-1) \dots (i-j+1)(x - x_0)^{i-j}$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(n)}(x) = c_n n(n-1) \dots 2$$

En évaluant ces dérivées en x_0, on trouve $p'(x_0) = c_1$, $p''(x_0) = 2c_2$, $p'''(x_0) = 6c_3$, ..., $p^{(j)}(x_0) = c_j j!$, ..., $p^{(n)}(x_0) = c_n n!$. En identifiant avec les dérivées de f évaluées en x_0, on trouve directement la formule données sur la page précédente.

Théorème 21

Soit f de E dans $\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Soit $a \in E$, alors il existe une fonction ϵ de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ telle que pour tout $x \in E$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x)$$

Exemple 11

On sait que si $|x| < 1$ alors $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ (il s'agit d'une série gémétrique). On a donc :

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x^i}_{p_n(x)} + \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i + x^n \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\epsilon(x)}$$

Théorème 22

Soit f de E dans $\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Soit $a \in E$, alors pour tout $x \in E$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

avec le reste :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

où c est compris entre a et x.

Preuve du théorème 22. On utilise le théorème de Rolle 13. Posons :

$$g(\lambda) = f(\lambda) - p_n(\lambda) - \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(\lambda - a)^{n+1}$$

avec

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

La fonction g, continue sur l'intervalle compris entre x et a, vérifie :

$$g(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1} = f(x) - p_n(x) - f(x) + p_n(x) = 0$$

et

$$g(a) = f(a) - p_n(a) = 0$$

par construction du polynôme $p_n(x)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle : on sait qu'il existe c_1 compris entre x et a tel que $g'(c_1) = 0$. La dérivée de g est :

$$g'(\lambda) = f'(\lambda) - p_n'(\lambda) - (n+1)\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(\lambda - a)^{n}$$

et on observe que l'on a encore $g'(a) = 0$ (par construction de $p_n(x)$ en identifiant ses dérivées en a avec celles de f en a) et bien sûr $g'(c_1) = 0$, puisque la fonction est continue, on peut à nouveau appliquer le théorème de Rolle. On sait donc qu'il existe c_2 entre c_1 et a tel que $g''(c_2) = 0$, avec :

$$g''(\lambda) = f''(\lambda) - p_n''(\lambda) - (n+1)n\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(\lambda - a)^{n-1}$$

En notant que $g''(a) = 0$, on sait qu'il existe c_3 compris entre a et c_2 tel que $g'''(c_3) = 0$ par le théorème de Rolle, avec :

$$g'''(\lambda) = f'''(\lambda) - p_n'''(\lambda) - (n+1)n(n-1)\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(\lambda - a)^{n-2}$$

On peut continuer ainsi jusqu'à la dérivée n-ième de g, et conclure qu'il existe c tel que :

$$g^{(n+1)}(c) = 0 = f^{(n+1)}(c) - p_n^{(n+1)}(c) - (n+1)!\,\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

Comme $p_n(x)$ est une fonction polynomiale de degré n, on sait que $p_n^{(n+1)}(x) = 0$ pour tout x, on a donc :

$$f^{(n+1)}(c) - (n+1)!\,\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

soit encore :

$$\underbrace{f(x) - p_n(x)}_{R_n(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Approximation polynomiale en un point

Série de Taylor

- Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut aller plus loin...

- Une **série entière** en x est une série de terme général $c_n x^n$, on note : $\sum_n c_n x^n$.

- La série converge si la somme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est définie. Le **radius de convergence** $r > 0$ est un réel tel que la série converge pour tout x tel que $|x| < r$.

- Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable en $x_0 \in E$, la série de Taylor associée à f est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

  On peut montrer, sous certaines conditions, que si la série converge alors elle converge vers $f(x)$.

Approximation polynomiale en un point

Application : convexité et tangentes

- La courbe représentative d'une fonction convexe (concave) est au dessus (dessous) de toutes ses tangentes.

- Pour le comprendre, considérons un développement de Taylor à l'ordre 2 d'une fonction f dans un voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\epsilon(x)$$

- En considérant des valeurs de x suffisament proches de a, on peut ommettre le reste :

$$f(x) \approx_a f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

- Si la fonction est convexe le dernier terme est positif, et donc :

$$f(x) \gtrsim_a f(a) + f'(a)(x-a)$$

où sur la droite nous reconnaissons l'équation de la tangente à f au point a.

Règle de l'Hôpital, I

- Quand on s'intéresse à la limite d'une fonction de la forme $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque $x \to a$, il arrive que l'on soit confronté à une forme indéterminée de type $0/0$ ou ∞/∞.

- La règle de l'Hôpital peut nous tirer de l'embarras.

Règle de l'Hôpital

Soient f et g deux fonctions dérivables (on suppose que g' ne s'annule pas). Alors si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (ou si les limites de f et g ne sont pas finies) on a :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- On éventuellement appliquer cette règle plusieurs fois (si les dérivées d'ordre supérieurs existent).

Nous ne montrerons pas la validité de la règle de l'Hôpital ici (il faut utiliser une généralisation du théorème de Rolle que nous n'avons pas présentée). On peut néanmoins, au moins dans le cas des formes indéterminées de type $0/0$, donner l'intuition et voir que cette règle est directement liée à la définiton même de la dérivée.

Soient f et g deux fonctions dérivables telles que $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\longrightarrow a} g(x) = 0$. Nous avons donc :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Puisque les deux fonctions sont dérivables, elles sont aussi continues et donc $f(a) = g(a) = 0$. En divisant le numérateur et dénominateur par $x - a$ il vient :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

On reconnaît au numérateur et dénominateur les taux de variation de f et g, ce qui explique pourquoi on peut éventuellement lever l'indétermination en considérant la limite du ratio des dérivées.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\longrightarrow a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\longrightarrow a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}
\end{aligned}$$

Règle de l'Hôpital, II

Exemple 12

Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{6x^2}{3e^x - x^3 - 3x - 3}$$

On cherche la limite quand x tend vers 0, et nous sommes confrontés à une forme indéterminée de type $0/0$. Par la règle de l'Hôpital, nous avons :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{12x}{3e^x - 3x^2 - 3} \quad \text{Il s'agit encore d'une forme intéterminée.}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{12}{3e^x - 6x} = \frac{12}{\lim_{x \to 0} 3e^x - 6x} = 4$$

Règle de l'Hôpital, III

Exemple 13

Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{\log x}{5x}$$

On cherche la limite quand x tend vers l'infini, et nous sommes confrontés à une forme indéterminée de type ∞/∞. Par la règle de l'Hôpital, nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{5} \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\end{aligned}$$

Règle de l'Hôpital, IV

Exemple 14

Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{e^x - 1}$$

On cherche la limite quand x tend vers 0, et nous sommes confrontés à une forme indéterminée de type $\infty - \infty$. Posons $u(x) = \frac{2}{x}$ et $v(x) = \frac{2}{e^x - 1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x) f(x)}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\frac{x}{2}(e^x - 1)} \quad \text{une forme indéterminée de type } 0/0. \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{2}(xe^x + e^x - 1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{2}(xe^x + e^x + e^x)} = 1
\end{aligned}$$