Calcul Économique

III. Suites, limites et continuité

Stéphane Adjemian

stephane.adjemian@univ-lemans.fr

Septembre 2024

Plan

Suites

- Une suite est une famille d'éléments, les ≪ termes ≫ de la suite, indexée par $\mathbb{N}$.
- Lorsque les éléments d'une suite appartiennent à un même ensemble E, cette suite peut être assimilée à une fonction de $\mathbb{N}$ dans E.
- Une suite est dite entière si E est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$, réelle si E est un sous ensemble de $\mathbb{R}$, ...
- On note habituellement u_0, u_1, u_2, ...les termes d'une suite.
- Une suite peut être définie à l'aide d'une expression récursive, $u_n = \varphi(u_{n-1})$ avec u_0 donné, ou d'un terme général, $u_n = \psi(n)$.
- La fonction ψ doit être telle que $\psi(n) = \varphi(\psi(n-1))$.

Limite d'une suite, I

Définition 1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $u^\star$ quand n tend vers l'infini, et on note $\lim_{n\to\infty} u_n = u^\star$, si et seulement si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } |u_n - u^\star| < \varepsilon \;\forall\, n > N$$

- $|u_n - u^\star|$ mesure la distance entre le n-ième terme de la suite et la limite $u^\star$.
- La suite converge vers $u^\star$ s'il est possible de rendre la distance entre u_n et $u^\star$ arbitrairement petite au delà d'un certain rang (N).
- Le rang à partir duquel les écarts sont plus petits que ε dépend a priori de ε. Plus ε est proche de 0 plus le rang sera élevé (plus loin il faudra aller pour contenir la distance entre u_n et $u^\star$ en deçà de ε).

Limite d'une suite, II

Exemple 1

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{n-2}{2n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^\star$) converge vers $u^\star = \frac{1}{2}$ quand $n \to \infty$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |u_n - u^\star| &= \left|\frac{n-2}{2n} - \frac{1}{2}\right| \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ainsi la distance entre u_n et $u^\star$ est plus petite que $\varepsilon > 0$ si $n > \frac{1}{\varepsilon} \equiv N(\varepsilon)$, et donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } |u_n - u^\star| < \varepsilon \; \forall\, n > N(\varepsilon)$$

- On établit la convergence d'une suite vers une limite en trouvant le rang $N(\varepsilon)$

Limite d'une suite, III

Théorème 1

1. *Si une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* $u^\star$ *pour limite, alors celle-ci est unique,*
2. *Toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente est bornée,*
3. *Toute suite croissante (décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente.*

Limite d'une suite, IV

Théorème 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites qui convergent respectivement vers* $u^\star$ *et* $v^\star$*. Alors :*

1. $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $u^\star + v^\star$,
2. $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\lambda u^\star$,
3. $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $u^\star \cdot v^\star$,
4. *Si* $v^\star \neq 0$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\frac{u^\star}{v^\star}$.

Existence de la limite d'une suite, I

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m > N,\ \forall n > N \text{ on ait } |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Théorème 3

Une suite converge si et seulement si elle est une suite de Cauchy.

Existence de la limite d'une suite, II

Exemple 2

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On peut montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. On a :

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &= \left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^m}{m}\right| \\ &\leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{(-1)^m}{m}\right| \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est vérifiée dès lors que n et m sont plus grands que $N(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon}$. Ainsi :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \forall m > N(\varepsilon),\ \forall n > N(\varepsilon) \ \text{ on ait } |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Suites divergentes, I

Définition 3

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite divergente si elle ne converge pas :

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \text{ tel que } \forall\, N \in \mathbb{N} \text{ on ait } |u_n - \ell| > \varepsilon$$

- Une suite peut diverger vers ∞ :

$$\forall \mathscr{A} \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow u_n \geq \mathscr{A}$$

- Une suite peut diverger vers $-\infty$:

$$\forall \mathscr{A} \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow u_n \leq \mathscr{A}$$

Suites divergentes, II

Théorème 4

1. *Toute suite non bornée est divergente,*
2. *Toute suite admettant une sous suite divergente est divergente.*
3. *Toute suite admettant des sous suites avec des limites différentes diverge.*

Suites divergentes, III

Exemple 3

Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r > 0$. Montrons que cette suite diverge. Le terme général de cette suite est $u_n = u_0 + nr$, pour simplifier (et sans perte de généralité) on suppose que $u_0 = 0$ et donc $u_n = nr$.

Cette suite est monotone croissante, puisque $r = u_n - u_{n-1} > 0$ pour tout $n > 1$. Ainsi pour tout $A > 0$ on peut toujours trouver un rang N (A/r) tel que $u_n > A$ pour tout $n > N$. On peut donc toujours trouver les termes arbitrairement grands à partir d'un certain rang $\Rightarrow$ la suite diverge vers $+\infty$.

Limites d'une fonction

- Une suite réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou un sous ensemble de $\mathbb{R}$).
- Étudier le comportement limite d'une suite est relativement simple car il n'y a qu'une seule direction : on caractérise l'évolution de u_n quand n tend vers $+\infty$.
- Avec une fonction, c'est un peu plus compliqué. On s'intéresse au comportement de la fonction $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, mais aussi quand x se rapproche des points de singularité de la fonction (voir l'exemple de la fonction rationnelle dans le chapitre 2).
- Dans cette section on étend la notion de limite aux fonctions.

Définition 4

La fonction $f(x)$ admet la limite $\ell < \infty$ lorsque x tend vers l'infini pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\nu > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ dès que $x > \nu$. On écrit alors :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$$

- La fonction f converge vers ℓ si on peut rendre la distance entre $f(x)$ et ℓ arbitrairement petite quand x est assez grand.

Définition 5

La fonction $f(x)$ admet la limite $\ell < \infty$ lorsque x tend vers moins l'infini pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\nu < 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ dès que $x < \nu$. On écrit alors :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (b)

Plus formellement :

Définition 4

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell < \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\nu > 0 \text{ tel que } |f(x) - \ell| < \varepsilon \forall x > \nu$$

Définition 5

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell < \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\nu < 0 \text{ tel que } |f(x) - \ell| < \varepsilon \forall x < \nu$$

Exemple 4

Soit la fontion $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ définie de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

On a :

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left|2 - \frac{1}{x} - 2\right| \\ &= \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

Ainsi la proposition $|f(x) - 2| < \varepsilon$ est équivalente à $x > \frac{1}{\varepsilon} \vee x < -\frac{1}{\varepsilon}$.
On pose donc $\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ et on a bien :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\nu(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } |f(x) - 2| < \varepsilon \forall x > \nu(\varepsilon)$$

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (d)

Définition 6 (divergence vers l'infini)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\eta > 0, \exists\nu > 0 \text{ tel que } f(x) > \eta \forall x > \nu$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\eta > 0, \exists\nu > 0 \text{ tel que } f(x) < -\eta \forall x > \nu$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\eta > 0, \exists\nu > 0 \text{ tel que } f(x) > \eta \forall x < -\nu$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\eta > 0, \exists\nu > 0 \text{ tel que } f(x) < -\eta \forall x < -\nu$$

Exemple 5

Soit la fontion $f(x) = x^2$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ diverge vers l'infini. On peut montrer que :

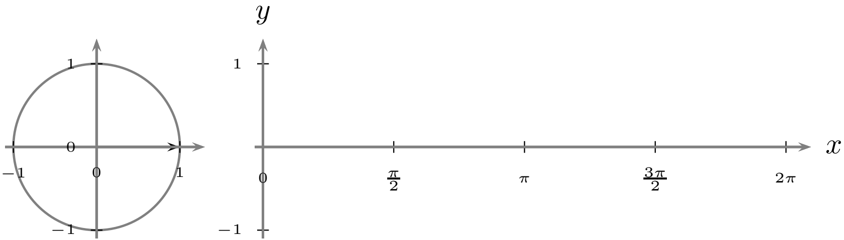
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

En effet, pour tout $x > \sqrt{\eta} \equiv \nu(\eta)$ on a $f(x) > \eta$ et cela quel que soit $\eta > 0$. Aussi pour tout $x < -\sqrt{\eta} \equiv \nu(\eta)$ on a $f(x) > \eta$ et cela quel que soit $\eta > 0$.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions pérodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

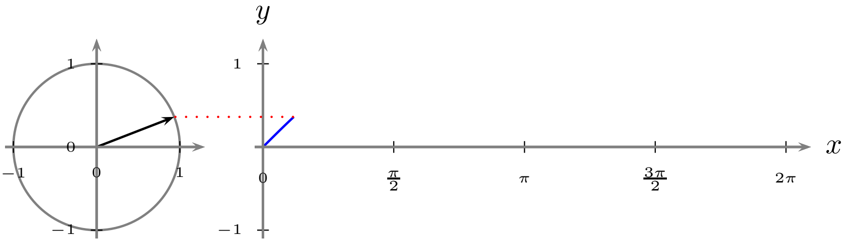


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions pérиodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

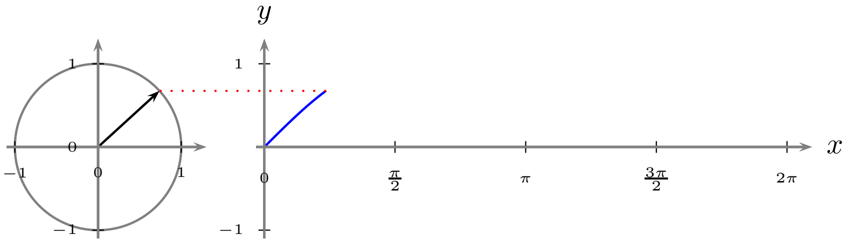


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

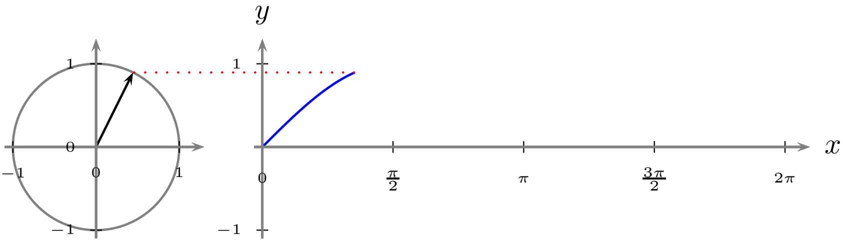


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

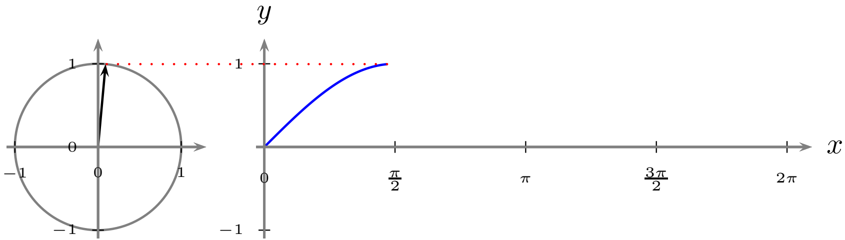


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

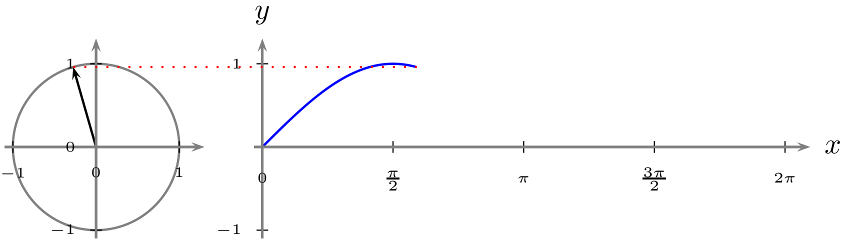


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

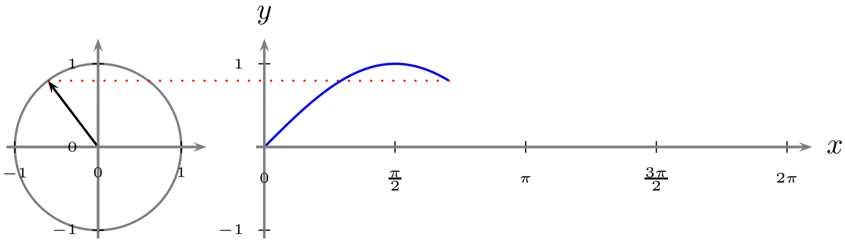


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

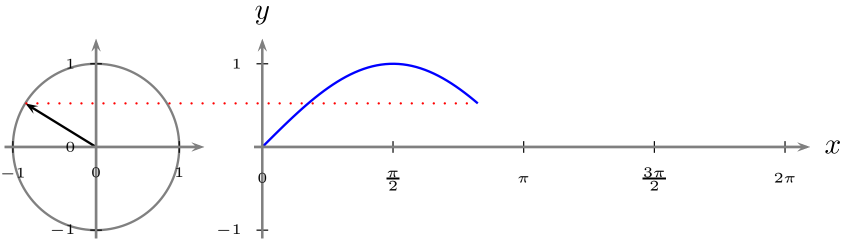
Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:



Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

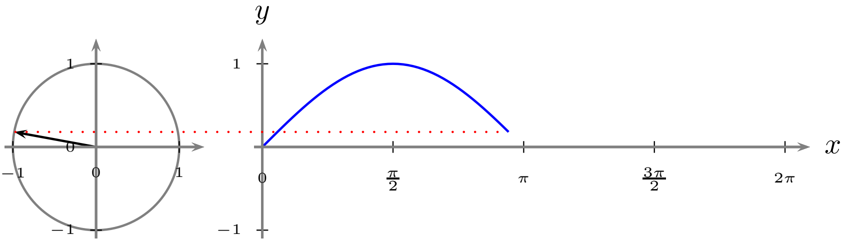


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

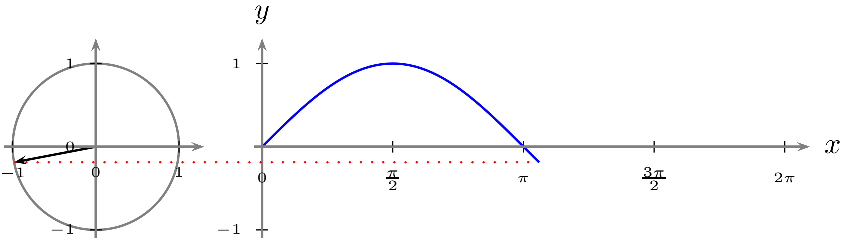


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

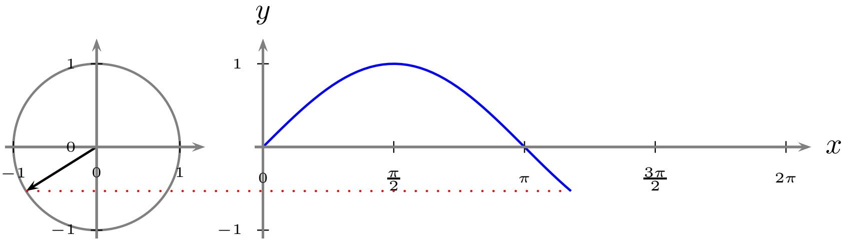
Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions pérododidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:



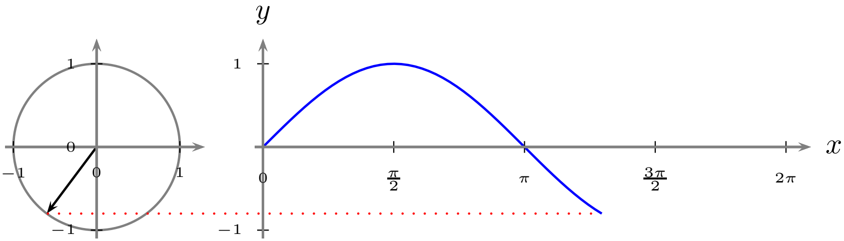
Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:



Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

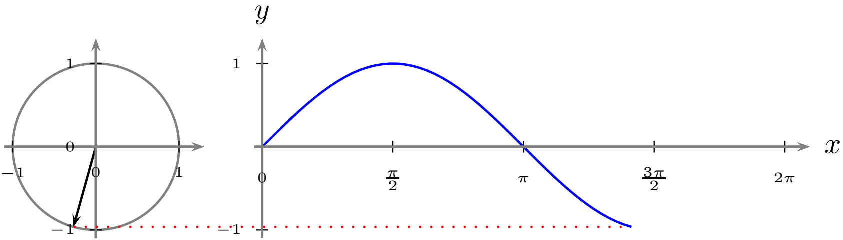


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

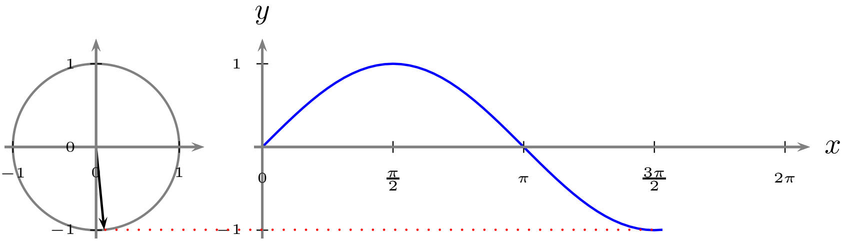
Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:



Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l’infini. C’est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

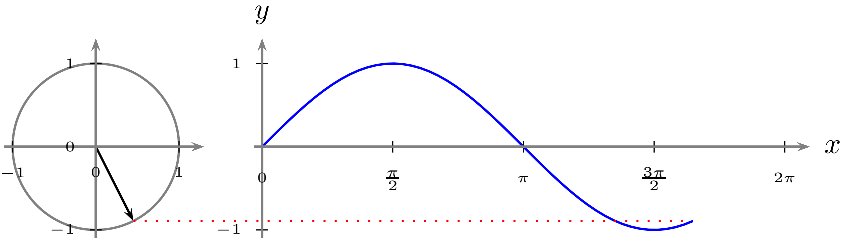


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

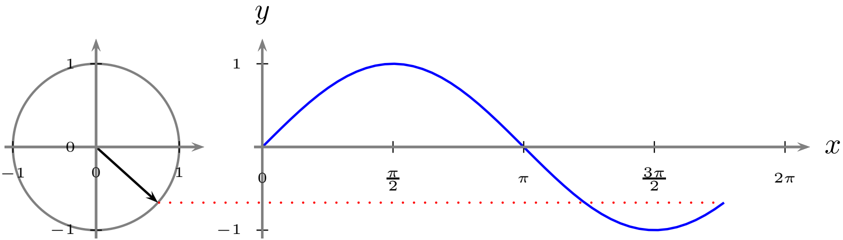
Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:



Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

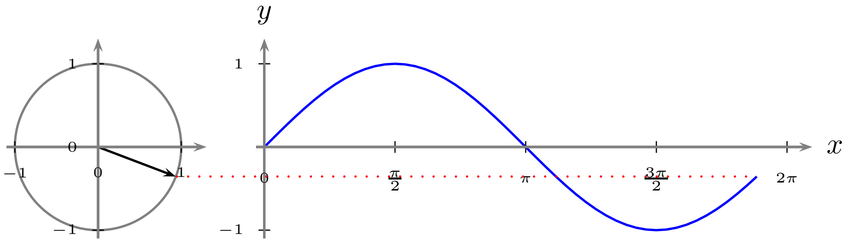


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:

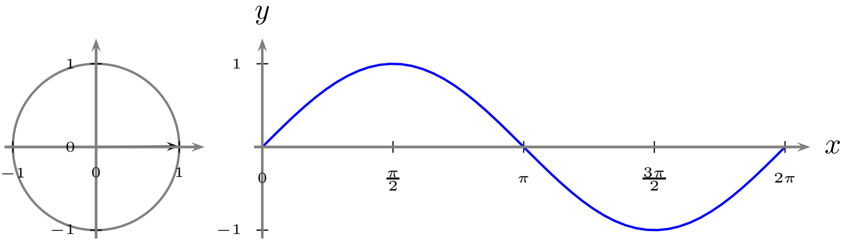


Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

Limites d'une fonction

Limites en $\pm\infty$ (f)

Une fonction peut ne pas converger vers une limite finie et ne pas diverger vers l'infini. C'est le cas des fonctions périodidiques, comme la fonction $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$:



Cette fonction est bornée, mais elle ne converge pas vers une limite finie, elle oscille entre -1 et 1.

- Une fonction peut ne pas être définie en certains points de $\mathbb{R}$, on parle alors de points de singularité.

- Par exemple, l'hyperbole $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ sauf en $x = 0$. Pour caractériser une fonction, il est utile de savoir comment se comporte f quand x se rapproche de ces points de singularité.

Définition 7 (limite finie en un point)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Exemple 6

Montrons que $\lim_{x \to 3} f(x) = 12$, avec $f(x) = 2x + 6$. La distance de f à sa limite en $x = 3$ est :

$$\begin{aligned} |f(x) - 12| &= |2x + 6 - 12| \\ &= |2x - 6| \\ &= 2|x - 3| \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $|f(x) - 12| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit) il existe donc bien un nombre $\eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ tel que si $|x - 3| < \eta$ alors $|f(x) - 12| < \varepsilon$.

Si x est suffisament proche de 3, alors on peut rendre la distance entre $f(x)$ et 12 arbitrairement petite.

Notons que dans ce cas la limite $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ Continuité.

Limites d'une fonction

Limites en un point (c)

- La limite en un point n'est pas nécessairement finie.
- C'est le cas, par exemple, sur les points de singularité d'une fonction rationnelle.

Définition 8 (limites non finies en un point)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \eta > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \eta$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \eta > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\eta$$

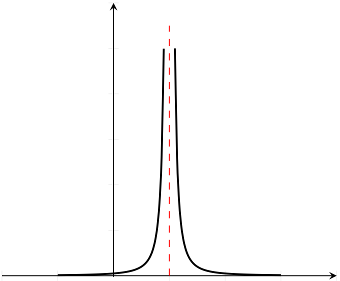
- La limite n'est pas finie si on peut rendre $f(x)$ arbitrairement grand en rapprochant x du point a.

Exemple 7

Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, il s'agit d'une fonction de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}_+$. Montrons que $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$.

Soit $\eta \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) > \eta \Leftrightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{\eta}$$
$$\Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{\eta}}$$



Ainsi en posant $\delta(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$, on a bien

$$\forall \eta > 0,\ \exists \delta(\eta) > 0,\ \text{ tel que}$$
$$|x-1| < \delta(\eta) \Rightarrow f(x) > \eta$$

Limites d'une fonction

Limites à gauche et à droite (a)

- Il peut arriver que la limite en un point a dépende de la façon dont on se rapproche de a.

Définition 9 (Limites finies à gauche et à droite)

1. On dit que $f(x)$ admet une limite à gauche ℓ finie ssi $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \wedge x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$, et on note $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.

2. On dit que $f(x)$ admet une limite à droite ℓ finie ssi $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \wedge x > a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$, et on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$.

- Si les limites à gauche et à droite sont différentes ou non définies, la limite de la fonction n'est pas définie.

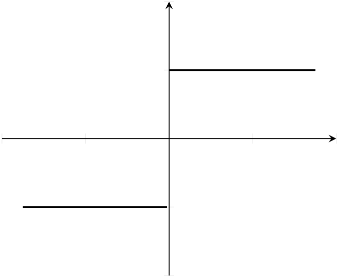
Limites d'une fonction

Limites à gauche et à droite (b)

Exemple 8

Soit la fonction $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Cette fonction n'est pas définie en 0 (puisque nous avons alors une forme indéterminée). Néanmoins, en notant que nous pouvons réécrire la fonctions sous la forme :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



nous avons :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Les limites à gauche et à droites ne sont pas nécessairement finies.

Définition 10 (Limites non finies à gauche et à droite)

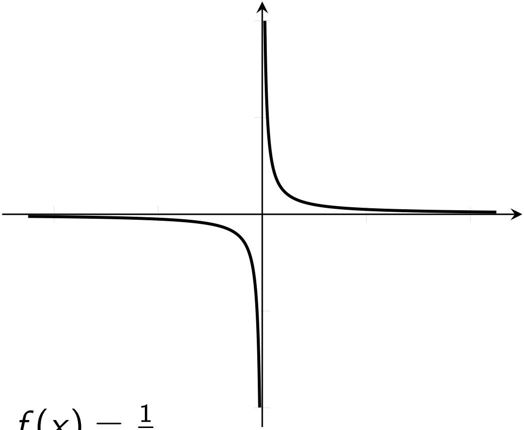
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \eta > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \delta \land x > a \Rightarrow f(x) > \eta$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \eta > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \delta \land x > a \Rightarrow f(x) < -\eta$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \eta > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \delta \land x < a \Rightarrow f(x) > \eta$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \eta > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \delta \land x < a \Rightarrow f(x) < -\eta$$

Les limites à gauche et à droite en zéro de l'hyperbole sont différentes :



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Théorème 5

Soient deux fonctions $f(x)$ *et* $g(x)$ *deux fonctions telles que* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, *où les constantes* ℓ_1 *et* ℓ_2 *sont des constantes finies, alors :*

1. $\lim_{x\to a} c = c$ *pour toute constante* c
2. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\ell_1$
3. $\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \ell_1 \pm \ell_2$
4. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \ell_1\ell_2$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, *si* $\ell_2 \neq 0$.

Limites d'une fonction

Limites usuelles

1. $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
5. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
6. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$
7. $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$
8. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$
9. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
10. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0,\ \forall\, a > 0,\ k \in \mathbb{R}$
11. $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0,\ \forall\, a > 0$
12. $\lim_{x\to\infty} = \frac{\log x^k}{x^m} = 0,\ \forall\, m > 0$

Limites d'une fonction

Exemple 9

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3}{x} &= \frac{\lim_{x\to 2} x^2 + 3}{\lim_{x\to 2} x} \\
&= \frac{\lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3}{\lim_{x\to 2} x} \\
&= \frac{\lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3}{\lim_{x\to 2} x} \\
&= \frac{2\cdot 2+3}{2} = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Limites d'une fonction

Exemple 10

Considérons la limite quand x tend vers 4 de la fonction $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$. Cette fonction n'est pas définie en $x = 4$ car on a alors une forme indéterminée de la forme $0/0$. Néanmoins, tant que $x \neq 4$, et c'est le cas quand on considère une limite (x se rapproche de 4 mais n'est pas égal à 4), on peut diviser le numérateur et le dénominateur par $x - 4$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} &= \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} \\
&= \lim_{x \to 4} x + 4 \\
&= \left(\lim_{x \to 4} x \right) + 4 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Limites d'une fonction

Exemple 11

On s'intéresse à la limite de la fraction rationnelle $f(x) = \frac{2x^3+5x^2+6}{x^3-3x+9}$ lorsque x tend vers l'infini. À nouveau nous sommmes en présence d'une forme indéterminée (de la forme $^\infty/_\infty$). En supposant, sans perte de généralité puisque nous nous intéressons au comportement de $f(x)$ quand x est très grand, que $x \neq$ on peut diviser le numérateur et le dénominateur par la plus grande puissance de x :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x^2+6}{x^3-3x+9} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} 2 + 5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + 6\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to\infty} 1 - 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{2+5\times 0+6\times 0}{1-3\times 0+9\times 0} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Continuité en un point, I

- Une fonction continue sur un intervalle est une fonction que l'on peut tracer sur une page sans lever le crayon, elle ne s'interrompt nulle part.
- Afin d'obtenir une définition plus opérationnelle, on commence par définir la continuité en un point.
- Pour qu'une fonction soit continue en un point il faut qu'elle soit définie en ce point, et que l'on puisse s'en approcher.

Définition 11

Une fonction $f(x)$ est dite continue en $x = a$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. $f(a)$ est défini,
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, et
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Continuité en un point, II

En utilisant la définition de la limite, on a alternativement :

Définition 12

Une fonction $f(x)$ est continue en $x = a$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad | \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- Une fonction f est continue en $x = a$ si on peut rendre arbirairement petite la distance entre $f(x)$ et $f(a)$ dès lors que x est assez proche de a.
- Si une fonction n'est pas continue en un point on dit qu'elle est discontinue.

Continuité en un point, III

- Puisque la continuité est définie à partir du concept de limite...
- On peut définir la continuité à droite et la continuité à gauche.
- Ce rafinement est nécessaire si la fonction est définie sur un intervalle fermé.

Définition 13

1. Une fonction $f(x)$ est continue à droite en $x = a$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad | \quad |x - a| < \delta \wedge x > a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

2. Une fonction $f(x)$ est continue à gauche en $x = a$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad | \quad |x - a| < \delta \wedge x < a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Continuité en un point, IV

- Si une fonction n'est pas continue en un point à droite **et** à gauche, alors elle est discontinue en ce point.
- Si une fonction est dite continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point $x \in E$.
- Au sens strict, une fonction ne peut donc être continue sur un interval fermé $[a, b]$ puisqu'elle n'est pas continue à gauche de a et à droite de b.
- On dira qu'une fonction est continue sur un intervalle $[a, b]$ si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et si elle continue à droite en a et continue à gauche en b.

Continuité, I

Exemple 12

Soit $f(x) = |x|$ une fonction défine sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrons que cette fonction est continue en $x = 0$.

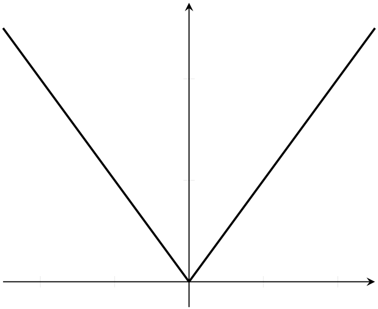
- $\lim_{x \to 0^-} |x| = 0$, en effet on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^-} |x| &= \lim_{x \to 0^-} -x \\ &= -\lim_{x \to 0^-} x = 0\end{aligned}$$

- $\lim_{x \to 0^+} |x| = 0$, en effet on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} |x| &= \lim_{x \to 0^+} x \\ &= 0\end{aligned}$$

- La limite existe (les limites à droite et à gauche existent et sont identiques) et est égale à $f(0) \Rightarrow$ Continuité en 0



Continuité, II

Exemple 13

Montrons que la droite $f(x) = ax + b$ est continue (pour des paramètres a et b réels) sur $\mathbb{R}$. Nous savons déjà que pour tout α réel fini $f(\alpha) = a\alpha + b$ est défini, il nous reste à montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \alpha} f(x) &= \lim_{x \to \alpha} ax + b \\ &= a \lim_{x \to \alpha} x + \lim_{x \to \alpha} b \\ &= a\alpha + b = f(\alpha) \end{aligned}$$

La fonction est donc continue en tout point $\alpha \in \mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Continuité, III

Exemple 14

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ une fonction de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Cette fonction n'est pas continue en 0. En effet en 0 on a $f(0) = 0$ (f est donc finie en ce point) et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, mais la limite à gauche n'est pas définie puisque la fonction racine carrée n'est pas définie pour les valeurs négatives de x.

Soit $\alpha > 0$, montrons que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \sqrt{\alpha}$ (comme la racine carrée de α est finie pour tout $\alpha < \infty$ cela suffit à montrer la continuité en α). Nous avons :

$$|f(x) - f(\alpha)| = |\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}| \leq \sqrt{|x - \alpha|}$$

Ainsi, si $|x - \alpha| < \varepsilon^2$ on a nécessairement $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$. En posant $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ nous avons donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,\text{tel que}\, |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

Revenons sur l'inégalité utilisée pour montrer la continuité de la fonction racine carrée, et montrons que l'on a :

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$$

De façon équivalente :

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\leq |a - b| \\ \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} &\leq |a - b| \end{aligned}$$

Distinguons de cas :

$a \geq b$ On a donc :

$$\begin{aligned} a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} &\leq a - b \\ \Leftrightarrow 2b &\leq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ \Leftrightarrow b &\leq \sqrt{a}\sqrt{b} \end{aligned}$$

ce qui est vrai dès lors que $a \geq b$. En effet $a \geq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} \geq b$.

$a \leq b$ On a donc :

$$\begin{aligned} a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} &\leq b - a \\ \Leftrightarrow 2a &\leq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ \Leftrightarrow a &\leq \sqrt{a}\sqrt{b} \end{aligned}$$

ce qui est vrai dès lors que $a \leq b$.

Ainsi quel que soit a et b positifs on a :

$$a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \leq |a - b|$$

ou de façon équivalente :

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$$

Fonctions lipschitzienne sur un intervalle, I

Définition 14

La fonction f de E dans $\mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne sur E si $\forall (x, y) \in E^2$ on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (avec $k \in \mathbb{R}_+$).

- La fonction constante $f(x) = c \, \forall c \in \mathbb{R}_+$ est 0-lipschitzienne.
- Une fonction f est lipschitzienne si $\exists k > 0$ tel que f est k-lipschitzienne.

Théorème 6

Si f est une fonction lipschitzienne sur E alors elle est continue sur le même intervalle.

Preuve du théorème 6. Si f est une fonction lipschitzienne sur E, alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \text{ on ait } |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

En particulier, on doit avoir pour $a \in E$:

$$\forall x \in E, \ |f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$$

Or $\forall k \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\lim_{x \longrightarrow a} |x - a| = 0$$

Autreent dit on peut rendre arbitrairement petite la distance entre $f(x)$ et $f(a)$ pourvu que x soit assez proche de a. La fonction f est donc continue en a. Comme ceci est valable pour tout a dans E, la fonction est continue sur E.

Fonctions lipschitzienne sur un intervalle, II

Exemple 15

La droite $f(x) = ax + b$ est une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (et donc continue, mais nous le savons déjà). Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |ax + b - ay - b| \\ &= |a| \cdot |x - y| \end{aligned}$$

La doite de pente a est donc $|a|$-lipschitzienne

Fonctions discontinues

Typologie

- Une fonction n'est pas continue sur E, si il existe un point dans E où la fonction est discontinue.
- Une fonction peut être discontinue en un point a pour trois raisons :

  1. La fonction f n'est pas définie en a,
  2. la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas, ou
  3. la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ est différente de $f(a)$.

- On distingue donc plusieurs types de discontinuités.

Fonctions discontinues

Discontinuité infinie (a)

- Si la fonction admet un point de singularité a sur son domaine où :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

- ...Ou si la fonction en un point a les limites à gauche et/ou à droite ne sont pas finies :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

- Possible avec des fonctions rationnelles lorsque le polynôme au dénominateur admet des racines réelles.

- ...Ou autres.

Fonctions discontinues

Discontinuité infinie (b)

Exemple 16

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+1}$ admet un point de singularité, elle n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

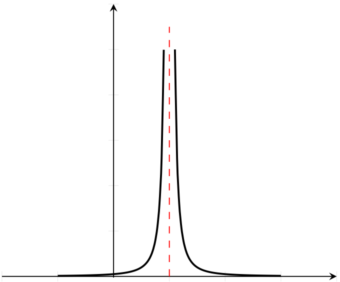
De façon équivalente :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Nous avons déjà montré que :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

La fonction f est donc discontinue en $x = 1$. Elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais elle est continue sur $]-\infty, 1[$ et $]1, \infty[$.



Fonctions discontinues

Discontinuité finie (a)

- Si la fonction « saute » en un point.
- Une fonction admet un saut en un point $x = a$, si la limite en ce point n'existe pas car les limites à gauche et à droite sont différentes.
- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \underline{\ell}$ et $\lim_{x \to a^+} f(x) = \overline{\ell}$, avec $\underline{\ell} \neq \overline{\ell}$, la fonction « saute » de $\underline{\ell}$ à $\overline{\ell}$ en $x = a$.

Fonctions discontinues

Discontinuité finie (b)

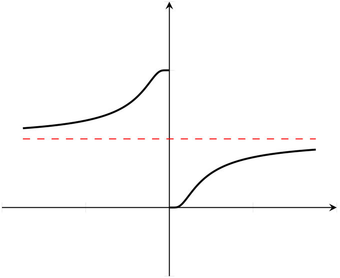
Exemple 17

La fonction $f(x) = \frac{2}{1+3^{\frac{1}{x}}}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus 0$ et saute en 0.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$



Fonctions discontinues

Discontinuité réparable (a)

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Supposons que f ait une limite définie en a, c'est-à-dire que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ avec $|\ell| < \infty$.
- On dit alors que f admet une discontinuité réparable en a, ou que f est prolongeable par continuité en a.
- On pose :

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$

  la fonction $\overline{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Une discontinuité peut être réparable à gauche (droite) seulement si la limite à gauche (droite) est définie mais pas la limite à droite (gauche).

Fonctions discontinues

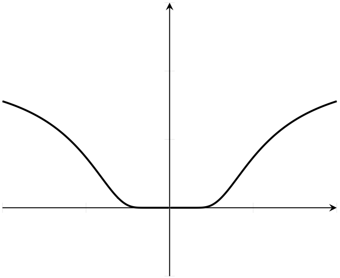
Discontinuité réparable (b)

Exemple 18

Soit la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ de $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}_+$.

- Cette fonction n'est pas définie en $x = 0$ à cause de la fraction sous l'exponentielle.
- Pourtant $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
- On prolonge la fonction $f(x)$:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Fonctions discontinues

Discontinuité apparente

- Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Si il existe $a \in E$ tel que la limite en a soit définie mais différente de $f(a)$, alors on parle de discontinuuité apparente.
- Si il existe $a \in E$ tel que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \neq f(a)$, tout se passe comme si il y avait une erreur dans la définition de la fonction.
- Ce type de discontinuité est réparable par prolongement.

Fonctions continues

Propriétés (a)

Théorème 7

Soient f et g deux fonctions continues sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors :

1. *$f + g$ et $f - g$ sont des fonctions continues,*
2. *$f \cdot g$ est une fonction continue,*
3. *f/g est une fonction continue en tout point de E où g est non nulle.*

Théorème 8

Soient f une fonction continue de E dans F et g une fonction continue de F dans G, alors la composition $g \circ f$ est continue tant qu'elle est définie.

Théorème 9

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle E, alors f admet une réciproque f^{-1}, celle-ci est continue sur l'image de E par f, strictement monotone et de même sens de monotonie que f.

Fonctions continues

Propriétés (c)

Théorème 10

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors f a une valeur maximale M et une valeur minimale m sur l'intervalle $[a, b]$, et f prend sur $[a, b]$ toute valeur comprise entre m et M

- Ce résultat assure l'existence des extrema d'une fonction.
- Il faut que la fonction soit continue sur un intervalle **fermé**.
- Pour tout $k \in [m, M]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Fonctions continues

Propriétés (d)

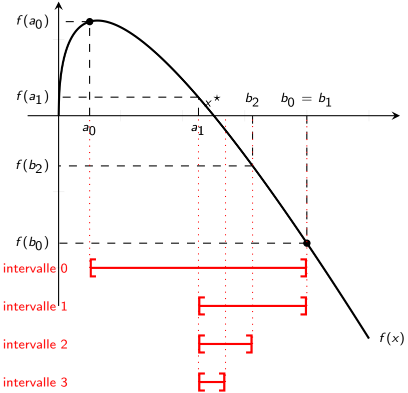
Théorème 11

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés il existe au moins un $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

- Ce résultat nous donne une condition suffisante d'existence de solutions pour les équations de la forme $f(x) = 0$.
- Si $P(x)$ est une fonction polynomiale d'ordre impair, avec un coefficient positif sur le monôme de degré le plus élevé, on sait que $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \infty} P(x) = \infty$. On peut donc toujours trouver un intervalle $[a, b]$ tel que $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$. Et on sait que dans cet intervalle on trouvera au moins une racine réelle du polynôme.
- Méthode de bissection pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Résoudre f(x)=0 par bissection

- On cherche a et b tels que $f(a)f(b) < 0$ (signes différents).
- Tant que $|f(a) - f(b)| > \varepsilon$:
  1. $m = \frac{a+b}{2}$ (moyenne)
  2. Si $f(a)f(m) < 0$ alors on pose $b = m$ et on retourne en 1.
  3. Si $f(b)f(m) < 0$ alors on pose $a = m$ et on retourne en 1.



Théorème 12

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u^\star$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(u^\star)$ quand n tend vers l'infini.

- Idem pour les limites des fonctions.

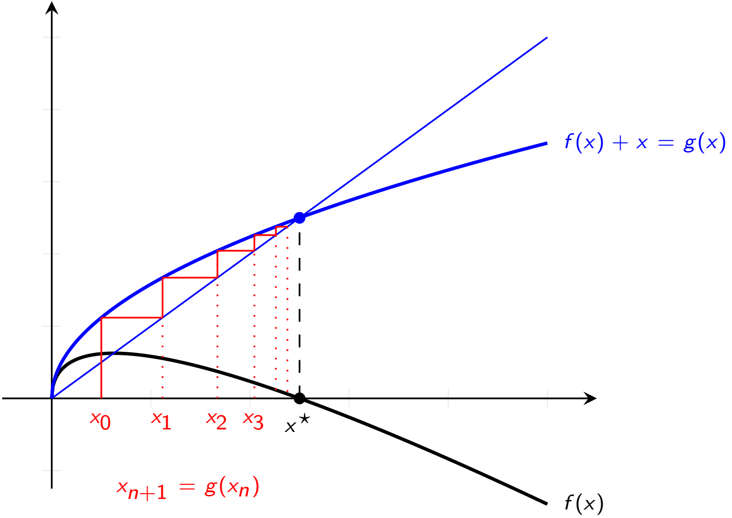
Théorème 13 (Point fixe)

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de façon récursive par $u_{n+1} = g(u_n)$, avec la condition initale u_0 donnée. Supposons que la suite converge vers $u^\star$. Si la fonction g est continue en $u^\star$ alors la limite de la suite est aussi la solution de l'équation $g(x) = x$.

- Donne une méthode pour calculer de façon itérative la solution de l'équation $g(x) = x$.
- Ou de façon plus générale une équation de la forme $f(x) = 0$.
- Plus efficace que la méthode de bissection (car on n'exploite pas seulement le signe de la fonction mais aussi sa valeur)... On peut faire encore mieux en exploitant les dérivées de la fonction.

Fonctions continues

Retour sur les équations récurrentes (b)



$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^\star$$