Calcul Économique

II. Fonctions

Stéphane Adjemian

stephane.adjemian@univ-lemans.fr

Septembre 2024

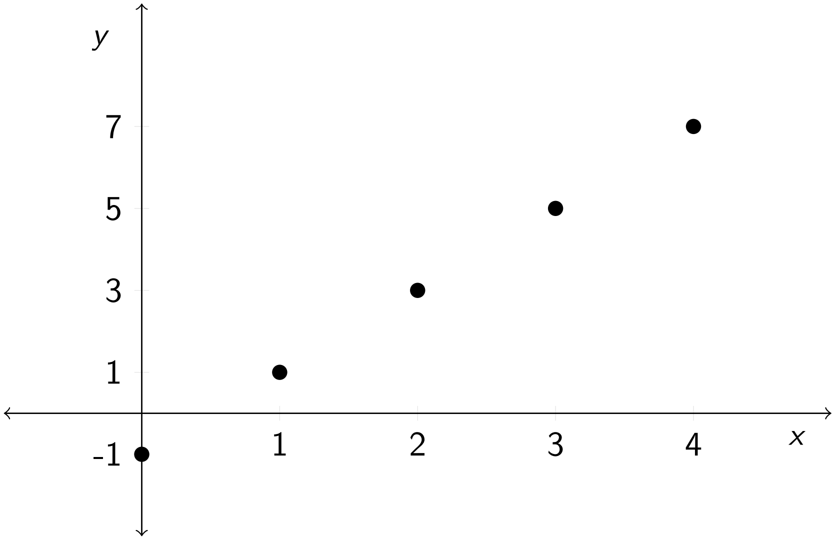
Plan

Réprésenter graphiquement une fonction, I

- Une fonction est un ensemble de paires ordonnées, construites à partir du **produit cartésien** de deux ensembles, tel que chaque élément de l'ensemble de départ est associé à un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée.
- Dans le chapitre précédent nous avons donné comme exemple de fonction :
$$B = \{(x, y)|x \in \mathbb{N} \land y = 2x - 1\}$$
- Pour réprésenter les fonctions on utilise un **plan cartésien**.
- Les éléments de l'ensemble de départ sont représentés sur une ligne horizontale (l'axe des abscisses).
- Les éléments de l'ensemble d'arrivée sont représentés sur une ligne verticale (l'axe des ordonnées).
- Chaque paire représente les coordonnées d'un point dans le plan.

Réprésenter graphiquement une fonction, II

L'ensemble B dans le plan cartésien



Les droites, I

La fonction la plus simple que nous puissions considérer est la droite. Celle-ci est caractérisée par l'équation :

$$y = ax + b$$

où a et b sont des paramètres réels, il s'agit d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

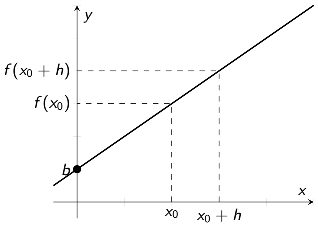
- Le paramètre a est la pente de la droite.
- Si $f(x) = ax + b$, alors :

  $$a = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$
- Le paramètre b est l'ordonnée à l'origine.
- Si $f(x) = ax + b$, alors :

  $$f(0) = b$$

Ceci est une droite



Les droites, II

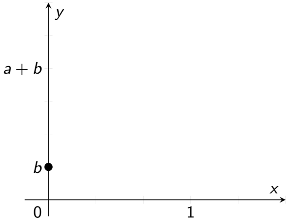
- On peut faire beaucoup de choses avec des droites. Vous verrez plus tard que l'on utilise souvent des droites pour approximer des fonctions plus générales (et complexes).
- Ce que vous devez savoir faire :
  1. Tracer une droite dans un plan,
  2. Retrouver l'équation d'une droite à partir d'un tracé,
  3. Trouver l'intersection d'une droite et de l'axe des abscisses,
  4. Calculer le point d'intersection de deux droites.

Les droites, III

Tracer une droite

Il suffit de se donner deux points sur la droite, de représenter ces deux points dans le plan, puis de les relier (avec une règle).

- Soit la droite $y = ax + b \equiv f(x)$.
- On sait qu'elle passe par $(0, b)$ (b est l'ordonnée à l'origine).
- On se donne un autre point, par exemple $(1, a + b)$ appartient aussi à la droite.

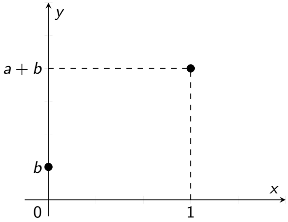


Les droites, III

Tracer une droite

Il suffit de se donner deux points sur la droite, de représenter ces deux points dans le plan, puis de les relier (avec une règle).

- Soit la droite $y = ax + b \equiv f(x)$.
- On sait qu'elle passe par $(0, b)$ (b est l'ordonnée à l'origine).
- On se donne un autre point, par exemple $(1, a + b)$ appartient aussi à la droite.

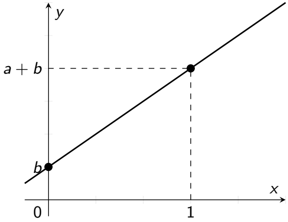


Les droites, III

Tracer une droite

Il suffit de se donner deux points sur la droite, de représenter ces deux points dans le plan, puis de les relier (avec une règle).

- Soit la droite $y = ax + b \equiv f(x)$.
- On sait qu'elle passe par $(0, b)$ (b est l'ordonnée à l'origine).
- On se donne un autre point, par exemple $(1, a + b)$ appartient aussi à la droite.



Les droites, IV

Déterminer l'équation d'une droite (a)

- Supposons qu'une droite passe par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1).
- Déterminons l'équation de la droite qui passe par ces deux points, c'est-à-dire déterminons la pente (a) et l'ordonnée à l'origine (b) de la droite qui passe par ces deux points.
- Les paramètres a et b sont tels que :

$$\begin{cases} y_0 &= ax_0 + b \\ y_1 &= ax_1 + b \end{cases}$$

  Nous avons deux inconnues et deux équations.
- La seconde équation peut s'écrire de façon équivalente :

$$b = y_1 - ax_1$$

Les droites, IV

Déterminer l'équation d'une doite (b)

- En substituant cette expression de b dans la première équation :

$$y_0 = ax_0 + y_1 - ax_1$$

- D'où finalement :

$$a = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad \text{(pente)}$$

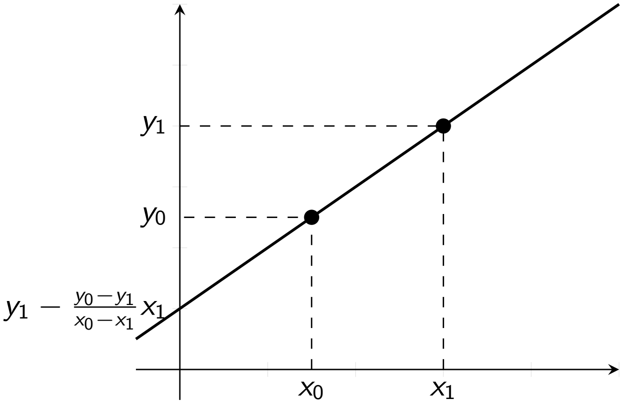
- Et donc :

$$b = y_1 - \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} x_1 \quad \text{(ordonnée à l'origine)}$$

- Notons que tout cela ne fonctionne que si $x_0 \neq x_1$ (voir l'expression de la pente)...Les deux points doivent être différents ! Autrement il n'est pas possible d'identifier la droite (on ne peut pas identifier de façon unique une droite passant par un seul point).

Les droites, IV

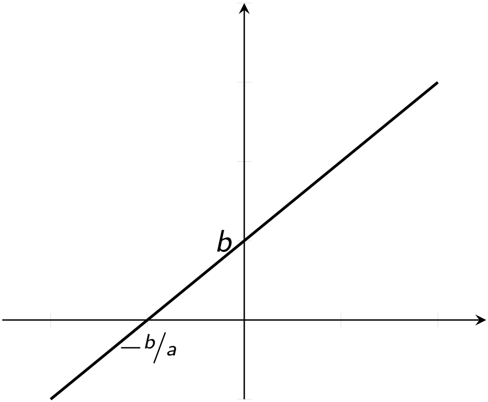
Déterminer l'équation d'une doite (c)



Les droites, V

Intersection d'une droite avec l'axe des abscisses

- On cherche la valeur de x telle que $ax + b = 0$.
- Il s'agit donc de résoudre une simple équation linéaire : $x = -b/a$.



Les droites, VI

Intersection de deux droites (a)

- Soient deux droites distinctes :

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + b_1 \\ y &= a_2 x + b_2 \end{aligned}$$

  où $a_1 \neq a_2$ (autrement les droites sont parallèles et n'admettent donc pas d'intersection).

- On cherche le point d'intersection $(x^\star, y^\star)$, celui-ci doit vérifier :

$$a_1 x^\star + b_1 = a_2 x^\star + b_2$$

  soit de façon équivalente :

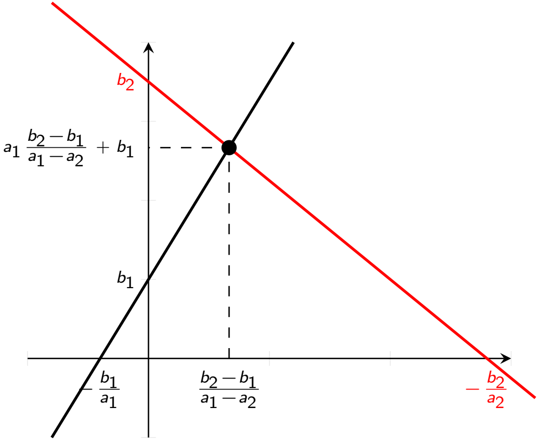
$$x^\star = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

Les droites, VI

Intersection de deux droites (b)

- Et on déduit :

$$y^\star = a_1 x^\star + b_1$$



Définition 1

On appelle polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

où les coefficients $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ sont réels et $\alpha_n \neq 0$.

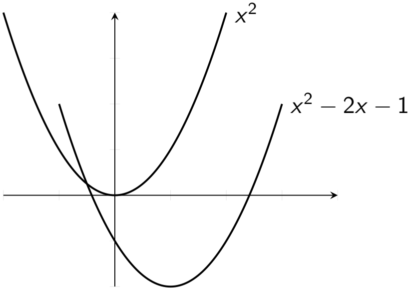
- On peut voir le polynôme comme une généralisation de la droite.
- Pour $n = 1$, on a :

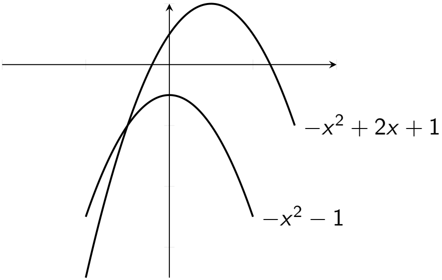
  $$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$$

  c'est-à-dire l'équation de la droite.
- Les puissances de x, c'est-à-dire les termes x^i pour $i = 1, \ldots, n$, sont des monômes.
- Un polynôme est une combinaison linéaire de monômes.

Polynômes, II

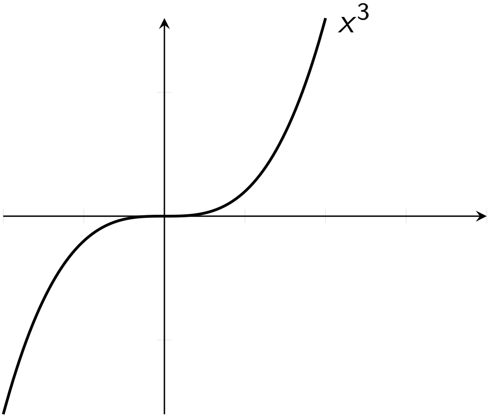
Exemple, polynôme de degré 2 (la parabole)





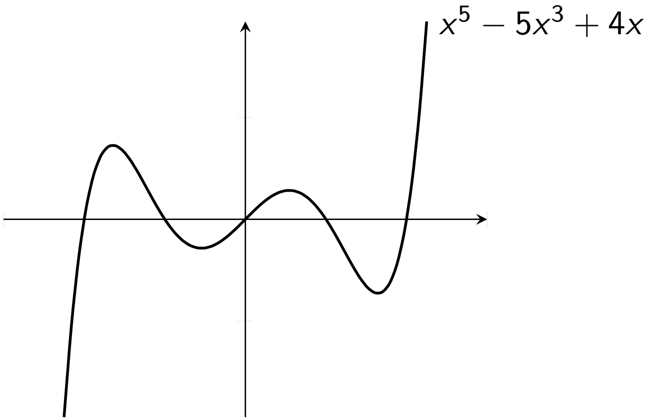
Polynômes, II

Exemple, polynôme de degré 3



Polynômes, II

Exemple, polynôme de degré 5



Définition 2

Une racine $x^\star$ d'un polynôme de degré n, $P_n(x)$, est une valeur de x telle que $P_n(x^\star) = 0$.

- Un polynôme peut avoir plusieurs racines, on verra plus loin que le nombre de racines est lié au degré du polynôme.
- Graphiquement, les racines réelles d'un polynôme correspondent à l'intersection de la courbe représentative du polynôme et de l'axe des abscisses.

Polynômes, III

Division euclidienne

Théorème 1

Soient deux polynômes $S(x)$ et $T(x) \neq 0$, alors il existe deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ uniques tels que $S(x) = Q(x)T(x) + R(x)$, avec $R(x) = 0$ ou un polynôme de degré inférieur au polynôme $T(x)$.

- Q est le quotient de la division euclidienne de S par T.
- R est le reste de la division euclidienne.
- Si le reste de la division euclidienne est nul, on dit qu'on a factorisé le polynôme S, puisque $S(x) = Q(x)T(x)$.

Polynômes, III

Division euclidienne, exemple 1

- Soient les polynômes $S(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$ et $T(x) = x^2 - x + 1$.

- La division de $S(x)$ par $T(x)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -2x^2 & +x & +3 & x^2 - x + 1 \\
\cline{5-5}
-6x^3 & +6x^2 & -6x & & 6x + 4 \\
\cline{1-3}
 & 4x^2 & -5x & +3 & \\
 & -4x^2 & +4x & -4 & \\
\cline{2-4}
 & & -x & -1 &
\end{array}
$$

- Le quotient est $Q(x) = 6x + 4$ et le reste $R(x) = -x - 1$.

Polynômes, III

Division euclidienne, exemple 2

- Soient les polynômes $S(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$ et $T(x) = x + 5$.

- La division de $S(x)$ par $T(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +6x^2 & -x & -30 & x+5 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -5x^2 & & & x^2+x-6 \\ \cline{1-2}
 & x^2 & -x & & \\
 & -x^2 & -5x & & \\ \cline{2-3}
 & & -6x & -30 & \\
 & & 6x & +30 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

- Le quotient est $Q(x) = x^2 + x - 6$ et le reste est nul.

- On peut donc écrire :

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x+5)(x^2 + x - 6)$$

Polynômes, III

Division euclidienne et racines

- Lorsque le reste de la divison euclidienne est nul, c'est-à-dire lorsqu'il est possible d'écrire $S(x) = Q(x)T(x)$, alors les racines de $Q(x)$ sont des racines de $S(x)$ et les racines de $T(x)$ sont des racines de $S(x)$.
- Dans l'autre sens, si $x^\star$ est une racine de $S(x)$ alors $x^\star$ est une racine de $Q(x)$ ou une racine de $T(x)$.
- Dans le dernier exemple on a $T(x) = x + 5$, donc -5 est une racine de $S(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$.
- Plus généralement, si $x^\star$ est la racine d'un polynôme $S(x)$, alors on peut toujours factoriser celui-ci sous la forme : $S(x) = (x - x^\star)Q(x)$.

Polynômes, IV

Racines d'un polynôme de degré 2 (a)

- Un polynôme de degré 2 est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$, b et c des paramètres réels.

- Une racine du polynôme de degré 2 est une valeur de x, notée $x^\star$, telle que :

$$a\, {x^\star}^2 + bx^\star + c = 0$$

- Cette équation admet au plus deux racines réelles.

- Si $x_1^\star$ et $x_2^\star$ sont deux racines réelles, alors on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1^\star)(x - x_2^\star)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$

Polynômes, IV

Racines d'un polynôme de degré 2 (b)

Exemple 1

Soit le polynôme de degré deux $f(x) = x^2 - 1$. Les racines de ce polynôme sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - 1 = 0$$

c'est-à-dire les valeurs de x telles que $x^2 = 1$. On voit immédiatement qu'il existe deux solutions :

$$x_1^\star = -1 \quad \text{et} \quad x_2^\star = 1$$

et on retrouve donc une identité remarquable bien connue :

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Polynômes, IV

Racines d'un polynôme de degré 2 (c)

Exemple 2

Soit le polynôme de degré deux $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Les racines de ce polynôme sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$$

Ainsi $x^\star = 1$ est une racine. On dit qu'il s'agit d'une racine double (ou de multiplicité deux) à cause la puissance deux le terme $x - 1$. On a donc :

$$x_1^\star = 1 \quad \text{et} \quad x_2^\star = 1$$

Polynômes, IV

Racines d'un polynôme de degré 2 (d)

Exemple 3

Soit le polynôme de degré deux $f(x) = x^2 + 1$. Les racines de ce polynôme sont les solutions de l'équation :

$$x^2 = -1$$

Il n'existe pas de solution réelle à cette équation, car le carré d'un nombre réel est toujours positif.

- Pour trouver des solutions à cette équation il faut sortir de l'ensemble des réels.
- Pouvons nous concevoir un ensemble où cette équation admette une (des) solution(s) ? $\Rightarrow$ Les nombres complexes...

Polynômes, IV

Le nombre imaginaire et l'ensemble des nombres complexes

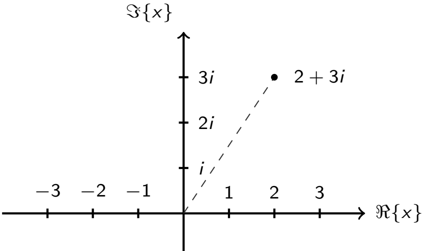
- On définit l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$, dont $\mathbb{R}$ est un sous ensemble, en « imaginant » que l'équation $x^2 = -1$ admet une solution que nous noterons i.

- i est le nombre imaginaire, il est défini comme $i = \sqrt{-1}$.

- Un nombre complexe $x \in \mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme :

$$x = a + i \cdot b$$

où $a \in \mathbb{R}$ est la partie réelle de x et $b \in \mathbb{R}$ la partie imaginaire.



Polynômes, IV

Arithmétique avec les nombres complexes

Soient $x = a_x + ib_x$ et $y = a_y + ib_y$ deux nombres complexes.

- **Somme de nombres complexes.**

$$x + y = a_x + a_y + i(b_x + b_y)$$

- **Produit de nombres complexes.**

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (a_x + ib_x)(a_y + ib_y) \\ &= a_x a_y + i a_x b_y + i b_x a_y + i^2 b_x b_y \\ &= a_x a_y - b_x b_y + i(a_x b_y + b_x a_y) \end{aligned}$$

- **Conjugué d'un nombre complexe.**

$$\bar{x} = a_x - ib_x$$

Polynômes, IV

Arithmétique avec les nombres complexes (suite)

- **Le produit d'un nombre complexe et de son conjugué est réel.**

$$\begin{aligned} x \cdot \bar{x} &= (a_x + ib_x)(a_x - ib_x) \\ &= a_x^2 + ia_xb_x - ia_xb_x - i^2 b_x^2 \\ &= a_x^2 + b_x^2 \end{aligned}$$

- **La norme d'un nombre complexe.**

$$|x| = \sqrt{x \cdot \bar{x}} = \sqrt{a_x^2 + b_x^2}$$

  généralise la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Polynômes, IV

Arithmétique avec les nombres complexes (suite et fin)

- **Quotient de deux nombres complexes.**

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= \frac{x \cdot \bar{y}}{y \cdot \bar{y}} \\
&= \frac{(a_x + ib_x)(a_y - ib_y)}{a_y^2 + b_y^2} \\
&= \frac{a_x a_y - i a_x b_y + i b_x a_y - i^2 b_x b_y}{a_x^2 + b_x^2} \\
&= \frac{a_x a_y + b_x b_y + i(b_x a_y - a_x b_y)}{a_x^2 + b_x^2} \\
&= \underbrace{\frac{a_x a_y + b_x b_y}{a_x^2 + b_x^2}}_{\Re\left\{\frac{x}{y}\right\}} + i \underbrace{\frac{b_x a_y - a_x b_y}{a_x^2 + b_x^2}}_{\Im\left\{\frac{x}{y}\right\}}
\end{aligned}
$$

Le discriminant

Le discriminant d'un polynôme de degré 2 est défini comme :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- La nature des racines dépend du signe du discriminant :

  $\Delta > 0$ Le polynôme possède deux racines réelles,

  $\Delta = 0$ Le polynôme possède une racine réelle de multilplicité deux, et

  $\Delta < 0$ Le polynôme possède deux racines complexes conjuguées.

- Un polynôme de degré deux possède toujours deux racines (dans $\mathbb{C}$)

Polynômes, IV

Racines d'un polynôme de degré 2 (f)

Théorème 2

Les racines d'un polynôme de degré 2 sont :

$$x^\star = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant.*

- Si $\Delta = 0$ (une racine de multiplicité deux) on a : $x^\star = -{}^{b}/_{2a}$.
- Les racines complexes conjuguées apparaissent quand $\Delta < 0$ à cause de la racine carrée.

Preuve du théorème 2 Le polynôme dont nous cherchons les racines est :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Les racines de $f(x)$ sont aussi les racines de :

$$g(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

on a simplement normalisé le polynôme en factorisant le paramètre a. Pour montrer que les racines sont bien celles données dans le théorème, nous allons factoriser $g(x)$ en utilisant successivement deux identités remarquable : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ et $\gamma^2 - \delta^2 = (\gamma - \delta)(\gamma + \delta)$. Réécrivons $g(x)$ de façon à pouvoir utiliser la première identité remarquable :

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

On peut alors faire apparaître le discriminant dans le dernier terme :

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la seconde identité remarquable :

$$g(x) = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Polynômes, V

Racines d'un polynôme de degré supérieur à 2

- De la même façon que pour les polynôme d'ordre 2, il existe des formules (par radicaux, c'est-à-dire qui n'utilisent que les opérations usuelles et des racines) pour calculer les solutions des équations polynomiales de degré 3 ou 4…Mais ces formules sont assez difficile à lire…
- En pratique, dans la vie d'un étudiant, on cherche des « racines évidentes » (petits entiers), et factorise le polynôme pour réduire le degré du polynôme dont il restera à calculer les racines.
- En pratique, dans la vraie vie, on utilise un ordinateur pour calculer numériquement les racines.

Polynômes, V

Calculer des racines en utilisant des solutions évidentes (a)

- Soit le polynôme de degré 3 :

$$f(x) = x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}$$

- On note que pour $x = 1$, on a :

$$f(1) = 1 - \frac{7}{4} + \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{8 - 14 + 7 - 1}{8} = 0$$

- On sait donc qu'on peut factoriser $(x - 1)$, c'est-à-dire écrire $f(x)$ comme le produit d'un polynôme de degré 2 et de $(x - 1)$.

- Pour trouver le polynôme de degré 2 on peut faire une division euclidienne, ou procéder par la méthode dite des « coefficients indéterminés ».

- Postulons $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ et identifions les paramètres a, b et c. Nous devons donc avoir :

$$x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{1}{8} = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Polynômes, V

Calculer des racines en utilisant des solutions évidentes (b)

- C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{1}{8} &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

- Par identification, on a donc :

$$\begin{cases} 1 &= a \\ -\frac{7}{4} &= b - a \\ \frac{7}{8} &= c - b \\ \frac{1}{8} &= c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -\frac{3}{4} \\ c &= \frac{1}{8} \end{cases}$$

- Et donc :

$$x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{1}{8} = (x-1)\left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}\right)$$

Polynômes, V

Calculer les racines numériquement

- Avec Python :

```
>>> import numpy as np
>>> np.roots([1, -7.0/4.0, 7.0/8.0, -1.0/8.0])
array([1.  , 0.5 , 0.25])
```

Ordre inverse des paramètres par rapport à nos notations.

- Il existe des algorithmes plus généraux pour trouver les zéros d'une fonction, c'est à dire des valeurs de x telles que $f(x) = 0$. On verra une version simple de ces algorithmes (qui reposent souvent sur des calculs de dérivées).

Fonctions rationnelles, I

Définition 3

Une fonction rationnelle est une fonction de la forme $\frac{p(x)}{q(x)}$, où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions polynomiales, c'est-à-dire :

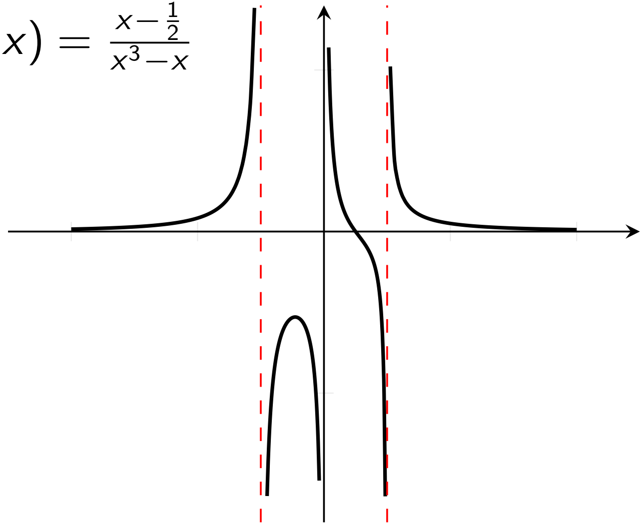
$$f(x) = \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$$

- Si $q(x)$ est un polynôme de degré 0 alors $f(x)$ est une fonction polynomiale.
- La fonction f est à valeur dans $\mathbb{R}$, mais le domaine de la fonction n'est généralement pas $\mathbb{R}$. Il faut exclure les points où $q(x)$ est nulle, c'est-à-dire les racines de $q(x)$. Ainsi :

$$f: \quad \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Fonctions rationnelles, II

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{x^3 - x}$$



Fonctions puissances, I

Définition 4

On appelle fonction puissance les fonctions de la forme :

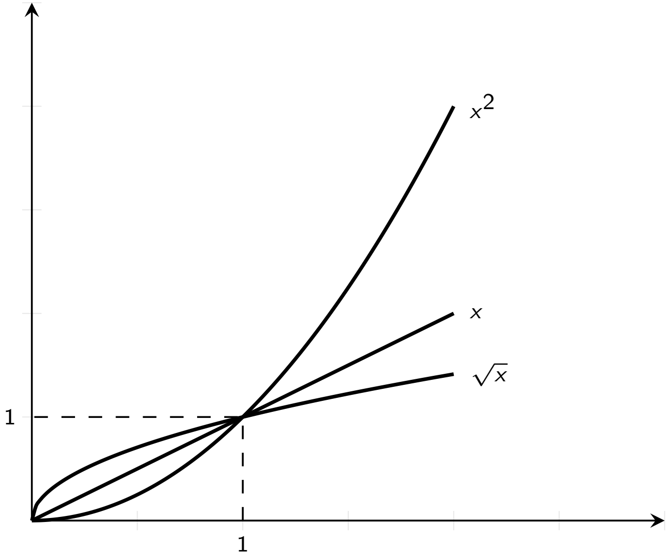
$$f(x) = x^{\alpha}$$

où α est une constante réelle.

- Le domaine de défnition dépend de α.
- Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire s'il existe p et q dans $\mathbb{N}$ tels que $\alpha = {}^{p}/_{q}$, alors on écrit : $x^{\alpha} = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^{p}}$.
- Si α est un entier naturel, alors le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
- Si α est un entier négatif, alors le domaine de définiton est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Si $\alpha = {}^{1}/_{q}$, le domaine de définiton est $\mathbb{R}$ si q est impair et $\mathbb{R}_{+}$ sinon.

Fonctions puissances, II

Exemple



Fonctions puissances, III

Propriété 1

Produit de fonctions puissances

Soit c une constante réelle, soient α et β deux paramètres réels, alors :

$$c^{\alpha} c^{\beta} = c^{\alpha+\beta}$$

Par exemple, dans le cas où les puissances sont entières :

$$\begin{aligned} c^m c^n &= \underbrace{c \times c \times \ldots \times c}_{m\times} \times \underbrace{c \times c \times \ldots \times c}_{n\times} \\ &= \underbrace{c \times c \times \ldots\ldots \times c}_{(m+n)\times} \\ &= c^{m+n} \end{aligned}$$

Fonctions puissances, III

Propriété 2

Puissance de puissance

Soit c une constante réelle, soient α et β deux paramètres réels, alors :

$$\left(c^{\alpha}\right)^{\beta} = c^{\alpha\beta}$$

Par exemple, dans le cas où les puissances sont entières :

$$\begin{aligned}
\left(c^{m}\right)^{n} &= \underbrace{c^{m} \times c^{m} \times \ldots \times c^{m}}_{n\times} \\
&= \underbrace{\underbrace{c \times c \times \times c}_{m\times} \times \ldots \times \underbrace{c \times c \times \times c}_{m\times}}_{n\times} \\
&= \underbrace{c \times c \times \ldots\ldots \times c}_{(mn)\times} \\
&= c^{mn}
\end{aligned}$$

Fonctions exponentielles, I

Définition 5

On appelle fonction exponentielle de base $a > 0$ les fonctions de la forme :

$$f(x) = a^x$$

Il s'agit d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

- D'après les propriétés précédentes, si f est une fonction exponentielle alors :

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

- Si on restreint le domaine à $\mathbb{N}$, cette fonction sert à calculer des intérêts composés ou des facteurs de croissance.

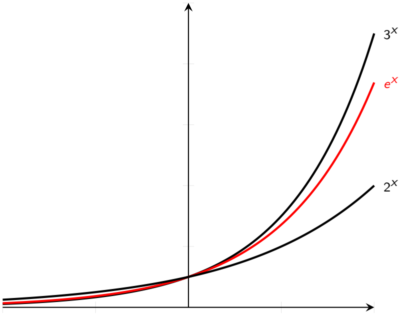
- On considère souvent la base :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709\ldots$$

une constante irrationnelle (Euler).

Fonctions exponentielles, II

Exemple



Logarithmes, I

Définition 6

Le logarithme de base a d'un nombre est la puissance de a qui donne ce nombre. On note $\log_a x$ le logarithme base a de x.

- Par définition, on doit donc avoir : $a^{\log_a x} = x$.
- On définit la fonction logarithme (base a) $f(x) = \log_a(x)$.
- Il s'agit de la réciproque de la fonction exponentielle, c'est une fonction de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$.
- Quand la base est omise, la base est la constante d'Euler (e), on parle alors de logarithme naurel (on aussi ln parfois).
- Les bases fréquemment utilisées sont 10, 2 et e.

Logarithmes, II

Propriétés

- **Logarithme de 1.** $\log_a 1 = 0$ (puisque $a^0 = 1$).

- **Changement de base.**

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

- **Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes.**

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$\Rightarrow$

$$\log_a\left(x^c\right) = c \log_a(x)$$

- **Le logarithme d'un ratio est la différence des logarithmes.**

$$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

- **Formule du logarithme d'un produit.** Par définition du logarithme :

$$\begin{aligned} \text{Si } y_1 &= a^{x_1} \text{ alors } \log_a(y_1) = x_1 \\ \text{Si } y_2 &= a^{x_2} \text{ alors } \log_a(y_2) = x_2 \end{aligned}$$

Par ailleurs nous savons que :

$$y_1 y_2 = a^{x_1 + x_2}$$

Nous avons donc que :

$$\log_a(y_1 y_2) = x_1 + x_2$$

c'est-à-dire :

$$\log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$$

- **Formule du change de base.** Notons que si $A = log_a(x)$, alors par définition du logarithme on a $x = a^A$. En base b nous avons donc :

$$\begin{aligned} \log_b(x) &= \log_b a^A \\ &= A \log_b a \\ &= \log_a(x) \log_b(a) \end{aligned}$$

Et donc finalement de façon équivalente :

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

En particulier nous avons :

- **Logarithme d'un inverse.** On peut montrer que $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$. En effet, on a :

$$\log_a 1 = \log_a \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log_a x + \log_a \left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme le $\log_a 1 = 0$ pour toute base $a > 0$, il vient :

$$\log_a x + \log_a \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

et donc :

$$\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

- **Formule du logarithme d'un quotient.** On a :

$$\begin{aligned}
\log_a \left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a \left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \\
&= \log_a x + \log_a \left(\frac{1}{y}\right) \\
&= \log_a x - \log_a y
\end{aligned}$$

Logarithmes, III