Calcul Économique

Éléments de correction du TD 3

Stéphane Adjemian

stephane.adjemian@univ-lemans.fr

Octobre 2022

Exercice 1

- On a $u_1 = 1$, $u_2 = u_1 + 1 = 2$, $u_3 = u_2 + 1 = 3$, ...
- En notant que, pour ces premiers termes, la valeur de suite correspond à la valeur de son indice, on devine que plus généralement on doit avoir $u_n = n$.
- On montre facilement qui si cela est vrai alors on doit alors avoir $u_{n+1} = n + 1$ (de sorte que le terme général postulé pour u_n est vrai pour tout n) :

  $$u_{n+1} = u_n + 1 = n + 1$$

  On a donc bien $u_n = n$ pour tout entier naturel n.
- On a $v_1 = \sum_{i=1}^{1} u_i = u_1 = 1$. On a aussi :

  $$v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

  Voir la fiche de TD 1 (exercice 6).

Exercice 2

- On a $u_1 = 1$, $u_2 = \rho u_1 = \rho$, $u_3 = \rho u_2 = \rho^2$, ...

- En comparant l'indice de la suite et l'exposant sur ρ, on devine que $u_n = \rho^{n-1}$.

- On montre facilement qui cela est vrai alors on doit avoir $u_{n+1} = \rho^n$ (de sorte que le terme général postulé pour u_n est vrai pour tout n) :

$$u_{n+1} = \rho u_n = \rho \rho^{n-1} = \rho^n$$

  On a donc bien $u_n = \rho^{n-1}$ pour tout entier naturel n.

- Caractériser le comportement asymptotique de la suite, c'est déterminer la limite, si elle existe, de u_n lorsque n tend vers l'infini. Cela dépend de ρ.

- Notons que selon le signe de ρ la suite est monotone ou alternée. En effet, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \rho^n - \rho^{n-1} = \rho^{n-1}(\rho - 1)$$

  Si $\rho > 1$ la suite est monotone croissante car $u_{n+1} - u_n > 0$. Si $\rho = 1$ ou $\rho = 0$ la suite est constante car $u_{n+1} - u_n = 0$. Si $\rho \in]0, 1[$ la suite est monotone décroissante car $u_{n+1} - u_n < 0$. Si $\rho < 0$ la suite est alternée, car $u_n > 0$ si et seulement si n est impair.

Exercice 2 (suite)

- La suite diverge vers $+\infty$ si $\rho > 1$. Pour tout $\mathscr{A} > 0$ on peut montrer qu'il existe un rang N tel que pour tout $n > N$ on ait $u_n > \mathscr{A}$.

$$u_n > \mathscr{A} \Leftrightarrow \rho^{n-1} > \mathscr{A} \Leftrightarrow (n-1)\log\rho > \log\mathscr{A} \Leftrightarrow n > 1 + \frac{\log\mathscr{A}}{\log\rho} \equiv N$$

  Conformément à l'intuition, on note que le rang N est d'autant plus petit que ρ est grand (c'est-à-dire que u_n croît vite, puisque le taux de croissance de u_n est $100\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right) = 100(\rho - 1)$ en pourcentage).

- La suite converge vers 0 si $0 < \rho < 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut montrer qu'il existe un rang N tel que pour tout $n > N$ on ait $|u_n - 0| < \varepsilon$.

$$|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \rho^{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow (n-1)\log\rho < \log\varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \frac{\log\varepsilon}{\log\rho} \equiv N$$

  où on a renversé le sens de la dernière inégalité car $0 < \rho < 1 \Rightarrow \log\rho < 0$. Conformément à l'intuition, on note que le rang N est d'autant plus grand que ε est proche de zéro (car $\log\rho < 0$).

Exercice 2 (suite)

- Quand $\rho < 0$, on sait que la suite est alternée. Il faut alors étudier le comportement de deux suites extraites :
  - la sous suite extraite associée aux indices paires ($u_{2k} < 0$ pour $k =, 1, 2, 3, \ldots$),
  - la sous suite extraite associée aux indices impairs ($u_{2k+1} > 0$ pour $k =, 0, 1, 2, 3, \ldots$),
- Si $-1 < \rho < 0$, en reprenant le même argument que sur la page précédente, on montre que les deux suites convergent vers 0.
- Si $\rho < -1$, on montre que la première sous suite diverge vers $-\infty$ et la seconde vers ∞.
- Enfin si $\rho = -1$, la suite oscille entre -1 et 1.

Exercice 2 (suite)

- La vitesse d'ajustement vers la limite, quand elle existe, est la même dans le cas d'une dynamique monotone ou oscillante.

- Supposons $0 < \rho < 1$ (dynamique monotone). D'après le terme général de la suite, nous avons :

$$u_n = \rho^{n-1}$$

Combien de périodes (N) faut-il pour passer en deçà de $1/2$ (nous partons de $u_1 = 1$) ?

$$u_N \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (N-1)\log\rho \leq -\log 2 \Leftrightarrow N \geq 1 - \frac{\log 2}{\log\rho}$$

- Il faut aller jusqu'en période $1 - \frac{\log 2}{\log\rho}$ pour que u comble la moitié de l'écart à sa limite. L'attente est d'autant plus longue que ρ est proche de un.

Exercice 3

n	1	2	3	4	...
u_n	3	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{2}$	...

- Pour établir la décroissance de u_n, nous devons montrer que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n.

- Nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} = \frac{n(n+3) - (n+1)(n+2)}{n(n+1)} = -\frac{2}{n(n+1)} < 0$$

- On montre que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ en montrant que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n > N$ on ait $|u_n - 1| < \varepsilon$ (à partir d'un certain rang la suite se rapproche arbitrairement de 1).

- Nous avons $|u_n - 1| = \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| = \frac{2}{n}$, et donc :

$$|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} \equiv N$$

Exercice 4

- Cette suite diverge vers $-\infty$.
- Pour le montrer, il suffit d'établir que l'on peut rendre arbitrairement petit u_n (vers $-\infty$) dès lors que l'indice n est assez grand.
- Il faut montrer que $\forall \mathscr{A} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < -\mathscr{A}$ pour tout $n > N$.

$$u_n < -\mathscr{A} \Leftrightarrow -n < -\mathscr{A} \Leftrightarrow n > \mathscr{A} \equiv N$$

Exercice 5

- Il s'agit d'une suite alternée (non monotone) à cause de la puissance sur -1.
- On a $|u_n - 0| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$.
- Soit $\varepsilon > 0$ une constante arbitrairement petite.
- On a :
$$|u_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \equiv N$$
- Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, si n est plus grand que le rang $N(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ alors $|u_n - 0| < \varepsilon$.
- On peut rendre u_n arbitrairement proche de 0 à partir du moment où n est assez grand.

Exercice 6

- Le prix d'équilibre $p^\star$ égalise l'offre et la demande : $S(p^\star) = D(p^\star)$.
- Le prix $p^\star$ doit donc satisfaire $1 + p^\star = 2 - p^\star \Leftrightarrow p^\star = \frac{1}{2}$.
- On en déduit la quantité échangée à l'équilibre $q^\star = S(p^\star) = \frac{3}{2}$.
- Notons $\bar{p}$ le point fixe de la récurrence, il est tel que :

$$\bar{p} = \bar{p} + \alpha \left(D(\bar{p}) - S(\bar{p}) \right)$$

en simplifiant, on a donc :

$$D(\bar{p}) - S(\bar{p}) = 0$$

$\Rightarrow$ Le point fixe est identique au prix d'équilibre : $\bar{p} = p^\star = \frac{1}{2}$.

- Il nous reste à établir sous quelle(s) condition(s), lorsque le marché n'est pas initialement équilibré, la règle d'évolution du prix assure qu'à long terme l'offre égalise la demande.

Exercice 6 (suite)

- Supposons que le prix initial soit différent du prix d'équilibre $p_0 \neq p^\star$.

Remarque Si $p_0 = p^\star$ alors $p_t = p^\star$ pour tout t, c'est un point fixe !

- La dynamique du prix dépend de l'excès de demande :

$$\mathscr{D}(p) = D(p) - S(p) = 2 - p - 1 - p = 1 - 2p$$

- On peut réécrire la dynamique du prix :

$$p_t = p_{t-1} + \alpha \mathscr{D}(p_{t-1})$$

$$\Leftrightarrow p_t = \alpha + (1 - 2\alpha) p_{t-1}$$

- Cette équation est vraie pour tout t, en particulier en $t - 1$ on doit avoir :

$$p_{t-1} = \alpha + (1 - 2\alpha) p_{t-2}$$

- En substituant dans l'équation pour p_t on exprime p_t en fonction de p_{t-2} :

$$p_t = \alpha + (1 - 2\alpha)\left(\alpha + (1 - 2\alpha) p_{t-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow p_t = \alpha + (1 - 2\alpha)\alpha + (1 - 2\alpha)^2 p_{t-2}$$

Exercice 6 (suite)

- De la même manière, en exprimant p_{t-2} en fonction de p_{t-3}, on obtient :

$$p_t = \alpha + (1-2\alpha)\alpha + (1-2\alpha)^2\alpha + (1-2\alpha)^3 p_{t-3}$$

- Puis :

$$p_t = \alpha + (1-2\alpha)\alpha + (1-2\alpha)^2\alpha + (1-2\alpha)^3\alpha + (1-2\alpha)^4 p_{t-4}$$

- Plus généralement :

$$p_t = \alpha \sum_{i=0}^{k-1} (1-2\alpha)^i + (1-2\alpha)^k p_{t-k}$$

- Si on remonte jusqu'à la condition initiale p_0, on a donc :

$$p_t = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-2\alpha)^i + (1-2\alpha)^t p_0$$

Exercice 6 (suite)

- $\sum_{i=0}^{t-1}(1-2\alpha)^i$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1-2\alpha$, on a donc encore :

$$p_t = \alpha \frac{1-(1-2\alpha)^t}{1-(1-2\alpha)} + (1-2\alpha)^t p_0$$

$$\Leftrightarrow p_t = \frac{1-(1-2\alpha)^t}{2} + (1-2\alpha)^t p_0$$

$$\Leftrightarrow p_t = p^\star + (1-2\alpha)^t (p_0 - p^\star)$$

- Clairement, si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ alors p_t converge de façon monotone vers $p^\star$ car dans ce cas $0 < 1-2\alpha < 1$ et donc $(1-2\alpha)^t$ converge de façon monotone vers 0.
- Si $\alpha < 0$ alors $1-2\alpha > 1$ et donc la suite de prix diverge vers $+\infty$.
- Si $\frac{1}{2}\alpha < 1$ alors $-1 < 1-2\alpha < 0$ converge vers $p^\star$ avec des oscillations amorties.
- Si $\alpha > 1$ la suite de prix diverge avec des oscillations.

Remarque Les trajectoires avec des prix négatifs ne sont pas de sens économique.

Exercice 7

n	1	2	3	4	...
u_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	...
u_n	2	1,5	1,4166667	1,4142157	...

- On peut écrire $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ de façon équivalente sous la forme :

$$\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \geq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} \geq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n^2 - 2u_n\sqrt{2} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \geq 0$$

Le carré d'un nombre réel ne peut être négatif, cette inégalité est donc nécessairement vérifiée et u_{n+1} est donc forcément supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

Exercice 7 (suite)

- Un point fixe de la suite est une valeur réelle $\bar{u}$ telle que :

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}}{2} + \frac{1}{\bar{u}}$$

- En toute généralité une suite peut admettre plus d'un point fixe.

- Ici il existe un unique point fixe. On a :

$$\bar{u}^2 = \frac{\bar{u}^2}{2} + 1$$

$$\frac{\bar{u}^2}{2} = 1$$

$$\bar{u}^2 = 2$$

- Comme la suite est positive (puisque $u_n \geq \sqrt{2}$), il existe une unique solution pour $\bar{u}$:

$$\bar{u} = \sqrt{2}$$

Exercice 7 (suite)

- Pour montrer que la suite est décroissante, il faut montrer que les variations sont négatives pour tout n.

- On a des équivalences suivantes :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$$

  La dernière inégalité est vraie puisque $u_n \geq \sqrt{2}$, on a donc bien $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n (l'inégalité est stricte tant que $u_n > \sqrt{2}$).

- La suite est donc monotone décroissante.

Exercice 7 (suite)

- La suite u_n est décroissante et bornée.
- La suite u_n est donc convergente.
- On a $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$.
- La suite u_n est à valeurs dans $\mathbb{Q}$, mais sa limite n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel).

Exercice 7 (suite)

- Pour montrer l'inégalité demandée en **(6)**, on a les équivalences suivantes :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2}\right) < u_n - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n + \frac{2}{u_n} - 2\sqrt{2} < u_n - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{u_n} < \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n > \sqrt{2}$$

  Cette dernière inégalité est vraie, puisque $\sqrt{2}$ est un minorant de la suite, donc la première inégalité est vraie.

- En itérant sur l'inégalité, on obtient :

$$u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_{n-1} - \sqrt{2}\right) < \frac{1}{2^2}\left(u_{n-2} - \sqrt{2}\right) < \ldots\ldots < \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right)$$

Exercice 7 (suite)

- On a donc bien :

$$0 < u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2^n}$$

- On voit donc qu'il est possible de rendre $|u_n - \sqrt{2}|$ arbitrairement petit à partir du moment où n est assez grand.

Exercice 8 (1)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(2+\frac{5}{x})}{x(x-\frac{3}{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x}}{x-\frac{3}{x}} \\
&= \frac{2+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}}{\lim_{x\to\infty} x - \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}} \\
&= \frac{2}{\lim_{x\to\infty} x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Exercice 8 (2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8}{x^2 + 6} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x - 4 + \frac{8}{x^2})}{x^2(1 + \frac{6}{x^2})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 4 + \frac{8}{x^2}}{1 + \frac{6}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} x - 4 + \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x^2}}{1 + \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} x - 4}{1} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Exercice 8 (3)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{kx^2+lx+m} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2})}{x^2(k+\frac{l}{x}+\frac{m}{x^2})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{k+\frac{l}{x}+\frac{m}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{a+\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^2}}{k+\lim_{x\to\infty}\frac{l}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{m}{x^2}} \\
&= \frac{a}{k}
\end{aligned}
$$

Il faut bien sûr supposer que $k \neq 0$, sinon la fonction diverge vers $+\infty$.

Exercice 8 (4)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} &= \lim_{x \to -4} \frac{(x-4)(x+4)}{x+4} \\
&= \lim_{x \to -4} (x - 4) \\
&= \lim_{x \to -4} x - 4 \\
&= -8
\end{aligned}$$

Exercice 8 (5)

$x \to 0^+ \Rightarrow x > 0$ et donc $|x| = x$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$x \to 0^- \Rightarrow x < 0$ et donc $|x| = -x$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x}{x} = -1$$

Exercice 9 (1)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 + 3 - 4x^2 + 3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4(x^2 + 2xh + h^2) - 4x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + h^2}{h} \\
&= 8x + \lim_{h \to 0} h \\
&= 8x
\end{aligned}
$$

Exercice 9 (2)

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} h^k}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} h^{k-1} \\
&= C_n^1 x^{n-1} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Exercice 9 (3)

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$