

CALCUL ÉCONOMIQUE

(Éléments de correction)

Stéphane Adjemian *

Le 7 juillet 2025 à 18:14

EXERCICE 1 (a) L'implication logique est définie de la façon suivante, à l'aide d'une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

où P et Q sont deux propositions. Il est possible d'exprimer de façon équivalente la proposition $P \Rightarrow Q$ sous la forme $\bar{P} \vee Q$. Nous utilisons une table de vérité :

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On note que sur chaque ligne des deux dernières colonnes nous avons les mêmes valeurs de vérité. Les deux propositions sont donc bien équivalentes. **(b)** Deux propositions P et Q sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On peut montrer que l'équivalence entre P et Q peut s'exprimer comme $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. On utilise encore une table de vérité :

*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Les valeurs des deux dernières colonnes sont identiques, nous avons donc bien montré l'équivalence entre ces deux propositions. **(c)** Ce résultat nous dit que pour établir l'équivalence entre deux propositions P et Q , on peut décomposer la preuve en deux parties en montrant d'abord que $P \Rightarrow Q$ puis en montrant la réciproque $Q \Rightarrow P$.

EXERCICE 2 On utilise une table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

La dernière colonne et la troisième colonne ont les mêmes valeurs de vérité sur chaque ligne, les deux propositions sont donc bien équivalentes. La proposition $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est la contraposée de la proposition $P \Rightarrow Q$. Un raisonnement par contraposition consiste à montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ pour établir que $P \Rightarrow Q$. Supposons que la proposition P soit ; Il pleut et la proposition Q soit ; Il y a des nuages . On a bien $P \Rightarrow Q$ (la présence de nuages dans le ciel est bien une condition nécessaire pour qu'il pleuve). Il est tout aussi évident que ; Il n'y a pas de nuages implique ; Il ne pleut pas.

EXERCICE 3 (a) En cours nous avons vu que la dérivée première est définie comme une limite, de la façon suivante :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(b) Nous avons :

$$f(x+h) = \frac{1}{1 - (x+h)^2}$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{1 - (x+h)^2} - \frac{1}{1 - x^2} \\ &= \frac{1 - x^2 - 1 + (x+h)^2}{(1 - (x+h)^2)(1 - x^2)} \\ &= \frac{(2x+h)h}{(1 - (x+h)^2)(1 - x^2)} \end{aligned}$$

puis :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2x+h}{(1 - (x+h)^2)(1 - x^2)}$$

Finalement la dérivée est la limite de la dernière expression quand h tend vers zéro, c'est-à-dire le ratio des limites au numérateur et au dénominateur (il n'y a pas d'indétermination dans ce cas) :

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

EXERCICE 4 (a) On a $g'(x) = \frac{d}{dx}f(\theta x)$, par la formule de dérivation en chaîne, on a donc :

$$g'(x) = \theta g(x)$$

c'est-à-dire la dérivée de θx par rapport à x , fois la dérivée de f évaluée en θx (sachant que la dérivée de f est f). La formule est donc correcte au premier rang ($n = 1$). Supposons que la formule soit vraie au rang n et montrons alors qu'elle est alors nécessairement vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que :

$$g^{(n+1)}(x) = \theta^{n+1}g(x)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= (g^n(x))' \\ &= (\theta^n g(x))' \\ &= \theta^n g'(x) \\ &= \theta^n \theta g(x) \\ &= \theta^{n+1} g(x) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient de la formule supposée vraie au rang n , la troisième vient des règles de dérivation (la dérivée d'une constante fois une fonction est égale à la constante fois la dérivée de la fonction), la quatrième égalité vient de la formule démontrée vraie au rang 1. Nous retrouvons donc bien la formule au rang $n + 1$, lorsqu'elle est vraie au rang n . La formule est donc vraie pour toutes les valeurs de n . **(b)** La fonction exponentielle satisfait la même propriété que la fonction f .

EXERCICE 5 On note que $x = 1$ est une racine évidente puisque $P(1) = 0$. Le polynôme peut donc s'écrire sous la forme factorisée :

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Il reste à déterminer les paramètres a , b et c . On procède par identification en développant l'expression précédente :

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

On doit donc avoir $a = 4$, $b - a = 4$ (donc $b = 8$), $c - b = -3$ (donc $c = 5$). Nous pouvons donc réécrire le polynôme sous la forme :

$$P(x) = (x - 1)(4x^2 + 8x + 5)$$

Calculons les racines du polynôme d'ordre deux. Le discriminant est :

$$\Delta = 64 - 4 \times 4 \times 5 = -16$$

Puisque le discriminant est complexe, nous savons que les deux racines sont complexes :

$$x = \frac{8 \pm 4i}{8} = \begin{cases} -1 - \frac{i}{2} \\ -1 + \frac{i}{2} \end{cases}$$

Au final le polynôme $P(x)$ possède trois racines : $x = 1$, $x = -1 - \frac{i}{2}$ et $x = -1 + \frac{i}{2}$.

EXERCICE 6 (a) Dans ce cas, $f'(x) = a$ et on aurait donc :

$$\frac{a}{ax + b} = \alpha$$

Clairement il n'est pas possible de trouver a et b satisfaisant cette équation (notons que si $\alpha = 0$, alors l'équation est satisfaite pour $a = 0$, mais nous cherchons une fonction f qui puisse vérifier la contrainte pour toute valeur de α). **(b)** Dans ce cas, on a : $f'(x) = ae^{ax+b}$ c'est-à-dire $f'(x) = af(x)$. Ainsi la contrainte est satisfaite si $a = \alpha$ et pour toute valeur de b . Puisque n'importe quelle valeur de b est acceptable, il existe une infinité (c'est-à-dire autant que de valeurs de b possibles) de fonctions f vérifiant la contrainte.

EXERCICE 7 Il suffit de noter (identité remarquable) qu'il est possible de réécrire la fonction sous la forme :

$$f(x) = (x + 1)^4 + 1$$

Puisque le premier terme est élevé à une puissance paire, il est forcément non négatif. Minimiser cette fonction revient à minimiser le premier terme, puisque le second terme (1) ne dépend pas de la variable de contrôle x . Le premier terme est nul (il ne peut pas être plus petit) lorsque $x = -1$. La fonction atteint donc sa valeur minimale en $x = -1$ et on a $f(-1) = 1$.

EXERCICE 8 Puisque la courbe est convexe, la tangente doit se situer sous la courbe représentative de la fonction. Pour trouver l'équation de la tangente à la courbe en x_0 il suffit de remarquer que la tangente passe par le point $(x_0, f(x_0))$ et que sa pente est donnée par la dérivée de la fonction évaluée en x_0 , $f'(x_0)$. La tangente, que nous noterons $T(x)$ est donc de la forme :

$$T(x) = f'(x_0)x + b$$

où b est l'ordonnée à l'origine qu'il nous reste à identifier. La tangente est une droite qui passe par les points $(0, b)$ et $(x_0, f'(x_0))$, comme sa pente est $f'(x_0)$, nous devons avoir :

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - b} = f'(x_0)$$

soit de façon équivalente :

$$b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

Nous avons finalement :

$$T(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

ou encore :

$$T(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$