

CALCUL ÉCONOMIQUE

Mercredi 13 décembre 2023

Les réponses non commentées ou insuffisamment détaillées ne seront pas considérées. Prenez le temps de faire des phrases.

EXERCICE 1 Soient P , Q et R trois propositions. Montrer que la proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est équivalente à la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

EXERCICE 2 Soient P et Q deux propositions. Le connecteur de Sheffer (nous ne l'avons pas vu en cours, il est très utilisé en informatique où il est généralement appelé *nand*) est noté et défini comme : $P \bar{\wedge} Q = \overline{P \wedge Q}$. **(1)** Construire une table logique pour donner les valeurs de vérité de $P \bar{\wedge} Q$ et définir en français (c'est-à-dire avec des mots) ce connecteur. **(2)** Montrer que $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \bar{\wedge} P) \bar{\wedge} (Q \bar{\wedge} Q)$. **(3)** Montrer que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \bar{\wedge} (Q \bar{\wedge} Q)$.

EXERCICE 3 Calculer les racines du polynôme suivant :

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + \frac{13}{4}X - \frac{5}{4}$$

EXERCICE 4 Résoudre l'équation suivante :

$$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$$

en montrant que cette équation n'admet qu'une seule solution.

EXERCICE 5 Soit la fonction à valeurs réelles $f(x) = \frac{1}{1-x}$. **(1)** Préciser son domaine de définition. **(2)** Cette fonction est-elle continue? Pourquoi? **(3)** Calculer, lorsqu'elle existe, la dérivée de cette fonction, $f'(x)$, en utilisant la définition de la dérivée (avec une limite).

EXERCICE 6 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions continues et dérivables deux fois. Calculer la dérivée seconde de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

EXERCICE 7 Soit la fonction à valeurs réelles $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$. **(1)** Quel est le domaine de définition de la fonction? **(2)** Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini. **(3)** Montrer que cette fonction admet un minimum global.

INDICE : Pour étudier le signe de la dérivée de f (du numérateur car vous devriez trouver que le dénominateur est toujours positif) vous pouvez réécrire le numérateur comme un polynôme d'ordre deux à l'aide du changement de variable $X = \sqrt{x}$.