

# CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian \*

Le 7 juillet 2025 à 18:14

**EXERCICE 1** Soient deux propositions  $P$  et  $Q$ . Montrer que les propositions  $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$  et  $P \Rightarrow Q$  sont équivalentes. Donner un exemple de raisonnement utilisant ce résultat.

**EXERCICE 2** Soient deux propositions  $P$  et  $Q$ . Montrer que si  $\bar{P} \Rightarrow Q$  est une proposition vraie et si  $Q$  est une proposition fausse, alors la proposition  $P$  est nécessairement vraie. Dans quel type de raisonnement ce résultat est-il utilisé?

**EXERCICE 3 (a)** Donnez la définition de la dérivée d'une fonction en un point. **(b)** En utilisant cette définition calculez la dérivée de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x}$$

en précisant auparavant le domaine de définition de cette fonction. **(c)** Quelle formule usuelle de dérivation auriez-vous pu utiliser pour arriver au même résultat?

**EXERCICE 4** Montrer par récurrence que :

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (1)$$

**EXERCICE 5** Soit le polynôme suivant :

$$P(X) = X^3 + \frac{1}{4}X - \frac{5}{4}$$

**(a)** Calculez les racines de ce polynôme. **(b)** Montrez que la fonction  $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$  est monotone croissante. **(c)** Montrez que la fonction est concave pour les valeurs négatives de  $x$  puis convexe pour les valeurs positives de  $x$ .

**(d)** Que pouvez vous dire du point  $(0, -\frac{5}{4})$ ? **(e)** Représentez graphiquement la fonction  $f(x)$ .

**EXERCICE 6** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Calculez la dérivée d'ordre deux de la fonction :  $h(x) = (f \circ g)(x)$ .

**EXERCICE 6** On suppose que la demande, adressée à une entreprise en situation de monopole sur un marché, dépend du prix  $p$  de la façon suivante :

$$D(p) = p^{-\epsilon} \quad \forall p > 0$$

avec  $\epsilon > 1$ . **(a)** Montrer que la demande est bien une fonction monotone décroissante du prix. **(b)** On définit l'élasticité de la demande par rapport au prix de la façon suivante :

$$\sigma(p) = -D'(p) \frac{p}{D(p)}$$

Calculez cette élasticité et montrez que celle-ci est constante, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du niveau du prix. L'élasticité prix de la demande quantifie la variation de la demande induite par une variation du prix. Si l'élasticité est constante, cela veut dire qu'une augmentation de 1% du prix induira toujours une baisse de  $\sigma\%$  de la demande quelle que soit le niveau du prix. **(c)** Pour répondre à la demande l'entreprise doit supporter un coût de production. On suppose que l'entreprise doit payer  $c > 0$  pour chaque unité de bien produite, c'est à dire que la fonction de coût est de la forme :

$$C(q) = cq$$

où  $q$  est la quantité de bien produite. Calculez  $C'(q)$ , c'est à dire le coût marginal. **(d)** Le profit de la firme est la différence entre ses recettes et ses dépenses. Les recettes de la firme sont données par la quantité de bien produite multipliée par le prix

\*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

de chaque unité de bien, c'est-à-dire  $R(p) = p \times p^{-\epsilon} = p^{1-\epsilon}$ . Les dépenses de la firme sont données par ses coûts de production :  $\mathcal{C}(p) = C(D(p)) = cp^{-\epsilon}$ . Ainsi, au total, le profit de la firme comme une fonction du prix  $p$  est :

$$\Pi(p) = R(p) - \mathcal{C}(p) = p^{1-\epsilon} - cp^{-\epsilon}$$

Puisque la firme est en situation de monopole, elle peut choisir le prix du bien. Cependant, sa liberté est limitée par la demande : elle n'a pas intérêt à choisir un prix trop élevé car elle sait qu'une augmentation du prix (qui devrait augmenter sa recette) induira aussi une baisse de la demande (ce qui contribuera, à l'inverse, à diminuer sa recette). La firme va choisir le prix qui maximise son profit, c'est ce prix optimal que nous allons chercher dans les questions suivantes, mais auparavant montrez que :

- (i) La recette du monopole est une fonction décroissante du prix
- (ii) Le coût du monopole est une fonction décroissante du prix

en interprétant ces résultats et en discutant les arbitrages de l'entreprise (par rapport à sa décision sur le prix du bien). **(e)** Calculez la dérivée de la fonction de profit. **(f)** On notera  $p^*$  le prix qui annule la dérivée du profit, calculez  $p^*$  en l'exprimant en fonction de  $c$  et  $\epsilon$ . **(g)** Montrez que  $\Pi'(p) > 0 \Leftrightarrow p < p^*$ . Le prix  $p^*$  est-il le prix qui maximise le profit du monopole?