

CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian *

Mardi 4 juin 2019

EXERCICE 1 (a) Rappeler à l'aide d'une table de vérité la définition de l'implication logique entre deux propositions P et Q . Montrer qu'il est possible de l'exprimer à l'aide d'un connecteur logique ($\wedge$ ou $\vee$) et d'une (ou plusieurs) négation(s). **(b)** Rappeler à l'aide d'une table de vérité la définition de l'équivalence logique entre deux propositions P et Q . Montrer qu'il est possible de l'exprimer à l'aide de deux implications logiques et d'un connecteur logique. **(c)** Expliquer en quoi ce résultat est important.

EXERCICE 2 Montrer la transitivité de l'implication logique.

EXERCICE 3 Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. **(a)** Rappeler la définition de la dérivée première d'une fonction. **(b)** Dans le cas $n = 1$, montrer que $f'(x) = 1$ pour tout x . **(c)** Dans le cas $n = 2$, montrer que $f'(x) = 2x$ pour tout x . **(d)** On suppose que la proposition :

$$P_n : \text{Si } f(x) = x^n \text{ alors } f'(x) = nx^{n-1}$$

est vraie. Montrer que la proposition :

$$P_{n+1} : \text{Si } f(x) = x^{n+1} \text{ alors } f'(x) = (n+1)x^n$$

est nécessairement vraie. **(e)** Conclure sur la dérivée première de la fonction $f(x)$.

EXERCICE 4 Soit f , g et h trois fonctions continues deux fois dérivables et dont les dérivées sont continues. **(a)** Quelle est la dérivée de $f(g(x))$ par rapport à x . **(b)** Calculer la dérivée d'ordre deux de $f(g(x))$ par rapport à x . **(c)** Calculer la dérivée d'ordre un de $f(g(h(x)))$. **(d)** Sous quelle(s) condition(s) la fonction réciproque f^{-1} existe-t-elle? **(e)** Calculer la dérivée d'ordre un de $f^{-1}(x)$.

EXERCICE 5 Notons S_n la somme des n premiers entiers impairs. Nous avons donc $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 3 = 4$ et plus généralement $S_n = 1 + 3 + \dots + 2n - 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = n^2$, c'est-à-dire que la somme des n premiers entiers impairs est égale au carré de n .

EXERCICE 6 (a) Représenter graphiquement une fonction convexe monotone croissante f . **(b)** Tracer une tangente à cette fonction en un point positif quelconque, disons $x_0 > 0$. **(c)** Donner l'équation de cette tangente.

EXERCICE 7 Sur un marché la quantité offerte (q) est donnée comme une fonction du prix par :

$$q = p^2$$

et la demande est déterminée par :

$$q = 6 - p$$

(a) Montrer qu'il existe un unique prix d'équilibre p^* . **(b)** Donner une représentation graphique des fonctions de demande et d'offre, et de l'équilibre.

EXERCICE 8 Calculer les racines du polynôme suivant :

$$P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 3x - 5$$

*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr