

CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian *

Le 7 juillet 2025 à 18:14

EXERCICE 1 (a) Rappeler à l'aide d'une table de vérité la définition de l'implication logique entre deux propositions P et Q . Montrer qu'il est possible de l'exprimer à l'aide d'un connecteur logique ($\wedge$ ou $\vee$) et d'une (ou plusieurs) négation(s). **(b)** Rappeler à l'aide d'une table de vérité la définition de l'équivalence logique entre deux propositions P et Q . Montrer qu'il est possible de l'exprimer à l'aide de deux implications logiques et du connecteur logique $\wedge$.

EXERCICE 2 Soient deux propositions P et Q . Montrer que si $\bar{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie et si Q est une proposition fausse, alors la proposition P est nécessairement vraie. Dans quel type de raisonnement ce résultat est-il utilisé ?

EXERCICE 3 Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. **(a)** Rappeler la définition de la dérivée première d'une fonction. **(b)** Dans le cas $n = 1$, montrer que $f'(x) = 1$ pour tout x . **(c)** Dans le cas $n = 2$, montrer que $f'(x) = 2x$ pour tout x . **(d)** On suppose que la propriété :

$$P_n : \text{Si } f(x) = x^n \text{ alors } f'(x) = nx^{n-1}$$

est vraie. Montrer que la propriété :

$$P_{n+1} : \text{Si } f(x) = x^{n+1} \text{ alors } f'(x) = (n+1)x^n$$

est nécessairement vraie. **(e)** Conclure sur la dérivée première de la fonction $f(x)$.

EXERCICE 4 Montrer que la proposition :

$$P_n : 2^{2 \times n} + 2 \text{ est un entier divisible par trois}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 5 Calculer les racines du polynôme suivant :

$$P(x) = x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

EXERCICE 6 On suppose que la demande, qui dépend du prix p , adressée à une entreprise est caractérisée par la fonction suivante :

$$D(p) = p^{-\epsilon}$$

avec $\epsilon > 0$. Dans la suite nous supposons que $0 < \epsilon < 1$. **(1)** Montrer que la demande est bien une fonction monotone décroissante du prix. **(2)** On définit l'élasticité de la demande au prix de la façon suivante :

$$\varepsilon(p) = D'(p) \frac{p}{D(p)}$$

Calculer cette élasticité et montrer qu'elle est constante. Comment s'interprète cette quantité ? **(3)** Pour répondre à la demande l'entreprise doit supporter un coût (de production). On suppose que l'entreprise doit payer $c > 0$ pour chaque unité de bien produite, c'est à dire que la fonction de coût est de la forme :

$$C(q) = cq$$

où q est la quantité de bien produite. Calculer $C'(q)$. Comment s'interprète cette quantité ? **(4)** Justifier la forme de la fonction de profit de l'entreprise :

$$\Pi(q) = p^{1-\epsilon} - cp^{-\epsilon}$$

(5) Calculer les dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonction de profit. Montrer que la fonction de profit est concave. **(6)** Calculer le prix qui maximise le profit. Interpréter le résultat.

*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr