

CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian *

Le 7 juillet 2025 à 18:14

EXERCICE 1 Soient P et Q deux propositions. Montrer que :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 Établir le résultat suivant :

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXERCICE 3 Soit une entreprise de production d'épingles. On suppose que le taux de croissance de sa production annuelle est $g > 0$ (ce taux est supposé constant). La première année elle produit 1000 unités. Calculer le nombre d'années T tel que sa production cumulée (ie, en sommant les productions des T années) atteigne 100000 d'unités ?

EXERCICE 4 Montrer par récurrence que si $f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

EXERCICE 5 Soit la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} $f(x) = x^4$. Justifier et donner les valeurs des propositions suivantes :

1. f est une fonction continue.
2. f est une fonction monotone croissante.
3. f est une fonction bijective.
4. f est une fonction concave.

EXERCICE 6 Calculer les racines du polynôme :

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 6$$

EXERCICE 7 Soient f, g et h trois fonctions.

1. Calculer la dérivée, par rapport à x , de $\frac{1}{f(g(x))}$.
2. Calculer la dérivée, par rapport à x , de $h(f(g(x)))$.
3. Calculer la dérivée d'ordre deux, par rapport à x , de $f(g(x))$.

*Université du Mans. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

EXERCICE 8 Soit la fonction $y = f(x) = x^\alpha$ une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , avec α un paramètre réel positif inférieur à un. Cette fonction représente le niveau de production obtenu par une firme lorsqu'elle utilise une quantité x du facteur de production. **(1)** Représenter graphiquement cette fonction. **(2)** Discuter la concavité/convexité de cette fonction à partir d'un argument graphique. **(3)** Conclure sur la concavité/convexité à partir de la dérivée d'ordre 2 de f . **(4)** Cette firme doit payer la location du facteur de production. On note p le prix d'une unité du facteur de production en termes de bien produit. Posons la fonction :

$$\Pi(x) = x^\alpha - px$$

Interpréter cette fonction. Quel est le concept représenté par cette fonction? **(5)** Représenter graphiquement cette fonction. Cette fonction est-elle concave ou convexe? **(6)** Calculer la dérivée d'ordre un de la fonction Π . **(7)** Identifier la quantité x^* telle que $\Pi'(x^*) = 0$. Calculer $y^* = f(x^*)$ et $\Pi^* = \Pi(x^*)$. **(8)** Interpréter Π^* et la condition qui détermine x^* .